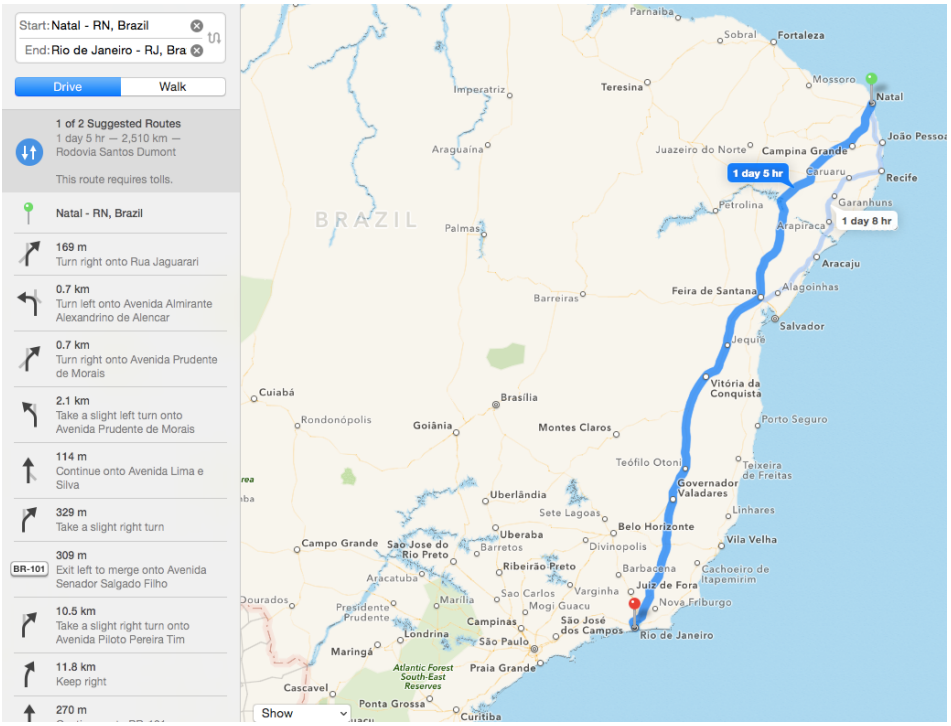
Aula 27: Grafos: caminho de custo mínimo

Árvores de extensão mínima

David Déharbe
Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemática Aplicada

Download me from `http://DavidDeharbe.github.io`

Plano



Introdução

Algumas propriedades de caminhos de custo mínimo

Relaxação

O algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Bellman-Ford

Referência: Cormen, cap 25.

PPgSC

Introdução

- qual o menor caminho para ir de Natal até o Rio de Janeiro?
- problema de grafo?
  - vértices: cruzamentos
  - arestas: há uma estrada/rua entre esses dois cruzamentos
  - peso: distância entre dois cruzamentos
- muitas possibilidades!
- soluções não tem ciclos
- pesos podem ser outras medidas (tempo, custo financeiro, pontos turísticos)
- otimização combinatória: caminho de custo mínimo
  single source shortest path, *all pairs shortest path*

PPgSC

Definições

$$G = (V, E, W) : \text{grafo dirigido com pesos}$$

Definição (Custo de um caminho)

Seja um caminho $\pi = (v_0, v_1, \ldots v_k)$. Então, temos que cada $(v_i, v_{i+1}) \in E$. O peso do caminho π, denotado $W(\pi)$ é tal que

$$W(\pi) = \sum_{i=1}^{k} W(v_{i-1}, v_i).$$

Definição (Caminho de custo mínimo)

O custo mínimo entre dois vértices u e v, denotado $\delta(u, v)$ é tal que:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{W(p) : u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{se existe um caminho de } u \text{ até } v \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Diferentes problemas de caminho de custo mínimo

- se não há pesos: busca em largura
- vértice origem fixado
  - custo mínimo de s para todos os demais vértices
- vértice destino fixado
  - custo mínimo de cada vértice até s
  - obtido do anterior com o grafo transposto
- vértices origem e destino fixados
  - não há solução asintoticamente melhor do que quando o vértice origem é fixado
- entre todos os pares de vértices
  - fixar sucessivamente a origem em todos os vértices
  - mas existe algoritmos assintoticamente melhores para este problema

PPgSC

Pesos negativos

- a presença ou ausência de pesos negativos muda os algoritmos possíveis
  - sem pesos negativos: algoritmo de Dijkstra
  - com pesos negativos: algoritmo de Bellman-Ford
- se há um ciclo tal que a soma dos pesos é negativa, então o custo mínimo é $-\infty$!
  - Bellman-Ford detecta ciclos negativos

PPgSC

Representação de caminhos de custo mínimo

- outra saída esperada: caminho de custo mínimo
- dados: $v.up$
- o caminho de custo mínimo de s até v é obtido seguindo $v, v.up, v.up., \ldots$ até s
- durante a aplicação do algoritmo, o valor de up é atualizado
  - cada $(v, v.up)$ forma uma aresta da árvore dos caminhos de custo mínimo
- em um grafo pode haver várias árvores dos caminhos de custo mínimo

PPgSC

Propriedades dos caminhos de custo mínimo

1. Supondo que $\pi = (v_0, v_1, \ldots v_{k-1})$ é um caminho de custo mínimo de v_0 até v_{k-1}:
   - O que podemos dizer do caminho $(v_i, v_{i+1}, \ldots v_j)$ contido em π?

Propriedades dos caminhos de custo mínimo

1. Supondo que $\pi = (v_0, v_1, \ldots v_{k-1})$ é um caminho de custo mínimo de v_0 até v_{k-1}:
   - O que podemos dizer do caminho $(v_i, v_{i+1}, \ldots v_j)$ contido em π?
2. Supondo que: $s \overset{p}{\rightsquigarrow} v$ é o caminho de custo mínimo de s até v e é composto por $s \overset{p'}{\rightsquigarrow} u$ e (u, v):
   - o que podemos dizer de $\delta(s, u)$, $\delta(s, v)$, $W(u, v)$?

Propriedades dos caminhos de custo mínimo

1. Supondo que $\pi = (v_0, v_1, \ldots v_{k-1})$ é um caminho de custo mínimo de v_0 até v_{k-1}:
   - O que podemos dizer do caminho $(v_i, v_{i+1}, \ldots v_j)$ contido em π?
2. Supondo que: $s \overset{p}{\rightsquigarrow} v$ é o caminho de custo mínimo de s até v e é composto por $s \overset{p'}{\rightsquigarrow} u$ e (u, v):
   - o que podemos dizer de $\delta(s, u)$, $\delta(s, v)$, $W(u, v)$?
3. Em geral, se (u, v) é uma aresta, qual relação podemos estabelecer entre $\delta(s, u)$, $\delta(s, v)$ e $W(u, v)$?

PPgSC

Trecho de caminho de custo mínimo

Propriedade

Lema (trecho de um caminho de custo mínimo)

Seja $\pi = (v_0, v_1, \ldots v_k)$ *um caminho de custo mínimo de* v_0 *até* v_k, *e* $0 \leq i \leq j \leq v_k$, *então o trecho* $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ *de* π *é um caminho de custo mínimo de* v_i *até* v_j.

Trecho de caminho de custo mínimo

Propriedade

Lema (trecho de um caminho de custo mínimo)

Seja $\pi = (v_0, v_1, \ldots v_k)$ um caminho de custo mínimo de v_0 até v_k, e $0 \leq i \leq j \leq v_k$, então o trecho $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ de π é um caminho de custo mínimo de v_i até v_j.

Demonstração.

- $\pi = v_0 \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} v_i \overset{\pi_2}{\rightsquigarrow} v_j \overset{\pi_3}{\rightsquigarrow} v_k$
- (por contradição) $\pi : v_0 \overset{\pi}{\rightsquigarrow} v_k$ caminho de custo mínimo de v_0 até v_k
- π_2 é um caminho de custo não mínimo de v_i até v_j
- seja π' um caminho de custo mínimo entre v_i e v_j.
- temos π_1, π', π_3 um caminho de v_0 até v_k de custo menor que π
- contradizendo a hipótese inicial

Decomposição do custo mínimo

Propriedade

Corolário (decomposição de custo mínimo)

Seja π um caminho de custo mínimo de s até v tal que π pode ser decomposto em $s \overset{\pi'}{\rightsquigarrow} u \rightarrow v$ para algum caminho π' e aresta (u, v). Então $\delta(s, v) = \delta(s, u) + W(u, v)$.

Decomposição do custo mínimo

Propriedade

Corolário (decomposição de custo mínimo)

Seja π um caminho de custo mínimo de s até v tal que π pode ser decomposto em $s \overset{\pi'}{\rightsquigarrow} u \rightarrow v$ para algum caminho π' e aresta (u, v). Então $\delta(s, v) = \delta(s, u) + W(u, v)$.

Demonstração.

- aplicação do lema do trecho de caminho de custo mínimo
- π tem custo mínimo
- π' é um trecho de π
- logo, π' tem custo mínimo
- $\delta(s, v) = W(\pi) = W(\pi') + W(u, v) = \delta(s, u) + W(u, v)$

Relação entre custos mínimos e pesos

Propriedade

Lema (relação entre custos mínimos e pesos)

Para qualquer aresta (u, v)*, temos*

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + W(u, v).$$

Relação entre custos mínimos e pesos

Propriedade

Lema (relação entre custos mínimos e pesos)

Para qualquer aresta (u, v)*, temos*

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + W(u, v).$$

Demonstração.

?

Relaxação

- relaxação: reduz o limite superior (estimativa conservadora) do custo de um caminho
- relaxação é aplicada repetidas vezes até chegar à solução
- o que é relaxação?

Algoritmo de relaxação

- s: um nó origem dado
- $v.d$: limite superior do custo de s até v
- $W(u, v)$: peso da aresta (u, v)

RELAX(u, v, W)

```
1  if v.d > u.d + W(u, v)
2        v.d = u.d + W(u, v)
3        v.up = u
```

Algoritmo de relaxação

- s: um nó origem dado
- $v.d$: limite superior do custo de s até v
- $W(u, v)$: peso da aresta (u, v)

RELAX(u, v, W)

```
1  if v.d > u.d + W(u, v)
2        v.d = u.d + W(u, v)
3        v.up = u
```

Justificativa:

- se a estimativa do custo de s até v é maior que a estimativa do custo de s até u somado ao peso de (u, v);
- existe um caminho de s até v com custo menor que os caminhos já calculados;
- este caminho termina pela aresta (u, v).

PPgSC

Relaxação: ponto de partida

- procedimento para iniciar com um estado compatível com a relaxação
- d é inicializado com uma estimativa conservadora: ∞
- s: vértice origem, logo $s.d = 0 = \delta(s, s)$

INIT-RELAX(G, s)

```
1  for v ∈ G.V
2        v.d = ∞
3        v.up = NIL
4  s.d = 0
```

RELAX(u, v, W)

1 **if** $v.d > u.d + W(u,v)$
2 $\quad v.d = u.d + W(u,v)$
3 $\quad v.up = u$

Lema (Pós-condição de RELAX(u, v, W))

Após executar RELAX(u, v, W)*, temos a seguinte relação:*

$$v.d \leq u.d + W(u,v)$$

Invariante

Algoritmo de relaxação

Lema (Invariante)

O invariante $\delta(s, v) \leq v.d$ *é*

1. *satisfeito após executar* $\textsc{Init-Relax}(G, s)$.
2. *preservado pela execução de* $\textsc{Relax}(u, v, W)$

Lema (Invariante)

O invariante $\delta(s, v) \leq v.d$ *é*

1. *satisfeito após executar* $\textsc{Init-Relax}(G, s)$.
2. *preservado pela execução de* $\textsc{Relax}(u, v, W)$

Demonstração.

inicialização:

- $\delta(s, s) = 0$ ou $\delta(s, s) = -\infty$ (se s estiver em um ciclo de peso negativo)
- em todo caso $s.d \geq \delta(s, s)$.
- para $v \neq s$, $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$.

Invariante

Algoritmo de relaxação

Lema (Invariante)

O invariante $\delta(s, v) \leq v.d$ *é*

1. *satisfeito após executar* $\textsc{Init-Relax}(G, s)$.
2. *preservado pela execução de* $\textsc{Relax}(u, v, W)$

Demonstração.

preservação por $\textsc{Relax}(u, v, W)$ (por contradição)

- seja v o primeiro vértice tal que $v.d < \delta(s, v)$
- então, após $\textsc{Relax}(u, v, W)$ temos

$$\begin{aligned} u.d + W(u, v) &= v.d \\ &< \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + W(u, v) \end{aligned}$$

- logo $u.d < \delta(s, u)$
- contradiz que v foi o 1^o vértice t.q. $v.d < \delta(s, v)$.

Corolário (Vértices não alcançáveis)

Depois de executar $\textsc{Init-Relax}(G, s)$*, para qualquer vértice* v *não alcançável a partir de* s*, temos que* $v.d = \delta(s, v)$*.*
A execução de $\textsc{Relax}(u, v, W)$ *mantem* $v.d = \delta(s, v)$*.*

Demonstração.

Pelo lema do invariante, temos que $v.d \geq \delta(s, v)$ sempre. Como $\delta(s, v) = \infty$, então teremos $v.d$ conserva seu valor inicial ∞ sempre. □

Extensão de caminho de custo mínimo

Lema (Extensão de caminho de custo mínimo)

Seja $s \rightsquigarrow u \rightarrow v$ um caminho de custo mínimo de s até os vértices u e v. Se $u.d = \delta(s,u)$ antes de executar $\textsc{Relax}(u,v,W)$, então $v.d = \delta(s,v)$.

Demonstração.

- lema do invariante:
  1. $\delta(s,v) \leq v.d$ sempre
  2. se $\delta(s,u) = u.d$ antes de executar $\textsc{Relax}(u,v,W)$, também $\delta(s,u) = u.d$ depois
- Depois executar $\textsc{Relax}(u,v,W)$,

$$
\begin{array}{rcll}
v.d & \leq & u.d + W(u,v) & \text{lema da pós-condição} \\
 & = & \delta(s,u) + W(u,v) & \text{hipótese vigente} \\
 & = & \delta(s,v) & \text{corolário decomposição de custo mínimo}
\end{array}
$$

Algoritmo de Dijkstra

Princípios

- Restrito a grafos com custos positivos.
- Mantem um conjunto de vértices $S = \{v \cdot v.d = \delta(s, v)\}$.
- Escolhe um vértice u a inserir em S
  - custo mínimo de s até u
- Relaxa com as arestas adjacentes a u
- abordagem gulosa

Algoritmo de Dijkstra

SINGLE-SOURCE-SHORTEST-PATH(G, s)

```
1  INIT-RELAX(G, s)
2  S = ∅
3  Q = G.V
4  while Q ≠ ∅
5        u = EXTRACT-MIN(Q)
6        S = S ∪ {u}
7        for (u, v) ∈ G.E
8              RELAX(u, v, G.W)
```

Q: fila de prioridade com chave d

Ilustração

Algoritmo de Dijkstra

Quadro

Assumindo que Q é um *heap* binário...

SINGLE-SOURCE-SHORTEST-PATH(G, s)

1 INIT-RELAX(G, s) // $\Theta(V)$
2 $S = \emptyset$
3 $Q = G.V$ // $O(V)$
4 **while** $Q \neq \emptyset$ // $\Theta(V)$ repetições
5 $u =$ EXTRACT-MIN(Q) // $O(\lg V)$
6 $S = S \cup \{u\}$
7 **for** $(u, v) \in G.E$ // total: $\Theta(E)$
8 RELAX$(u, v, G.W)$ // $O(\lg V)$

Assumindo que Q é um *heap* binário...

SINGLE-SOURCE-SHORTEST-PATH(G, s)

1 INIT-RELAX(G, s) // $\Theta(V)$
2 $S = \emptyset$
3 $Q = G.V$ // $O(V)$
4 **while** $Q \neq \emptyset$ // $\Theta(V)$ repetições
5 $u =$ EXTRACT-MIN(Q) // $O(\lg V)$
6 $S = S \cup \{u\}$
7 **for** $(u, v) \in G.E$ // total: $\Theta(E)$
8 RELAX$(u, v, G.W)$ // $O(\lg V)$

Total: $O(V \lg V + E \lg V)$

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s, u)$

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s, u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v, s)$

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s, u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v, s)$
- certamente $v \neq s$, pois
  - s é o primeiro vértice inserido em S
  - $s.d$ é 0 quando é inserido, e $\delta(s, s) = 0$.

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s, u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v, s)$
- $v \neq s$

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s, u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v, s)$
- $v \neq s$
- logo $S \neq \emptyset$ quand v é inserido em S.

PPgSC

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s, u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v, s)$
- $v \neq s$, $S \neq \emptyset$

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s, u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v, s)$
- $v \neq s$, $S \neq \emptyset$
- necessariamente há um caminho de s até v
  1. senão, pelo corolário dos vértices não alcançáveis, $v.d = \delta(s, v)$,
  2. contradizendo hipótese vigente $v.d \neq \delta(v, s)$.

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s, u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v, s)$
- $v \neq s$, $S \neq \emptyset$, $s \rightsquigarrow v$
- logo existe um caminho de custo mínimo entre s e v, digamos p (necessariamente $\not\subseteq S$).
- seja y o primeiro vértice de p em $V - S$ e x o predecessor de y em p

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s, u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v, s)$
- $v \neq s$, $S \neq \emptyset$, $s \rightsquigarrow v$, $p = p_1(x, y)p_2$, $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \rightarrow y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} v$, $p_1 \subseteq S$, $W(p) = \delta(s, v)$

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s,u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v,s)$
- $v \neq s$, $S \neq \emptyset$, $s \rightsquigarrow v$, $p = p_1(x,y)p_2$, $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \rightarrow y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} v$, $p_1 \subseteq S$, $W(p) = \delta(s,v)$
- necessariamente $x.d = \delta(s,x)$,
- $x \in S$, então foi aplicado $\textsc{Relax}(x,y,W)$
- pelo lema da extensão de caminho de custo mínimo, $y.d = \delta(s,y)$

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s,u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v,s)$
- $v \neq s$, $S \neq \emptyset$, $s \rightsquigarrow v$, $p = p_1(x,y)p_2$, $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \rightarrow y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} v$, $p_1 \subseteq S$, $W(p) = \delta(s,v)$, $y.d = \delta(s,y)$

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s,u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v,s)$
- $v \neq s$, $S \neq \emptyset$, $s \rightsquigarrow v$, $p = p_1(x,y)p_2$, $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \rightarrow y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} v$, $p_1 \subseteq S$, $W(p) = \delta(s,v)$, $y.d = \delta(s,y)$
- y ocorre antes de v em um caminho de custo mínimo
- os pesos não são negativos
- logo $\delta(s,y) \leq \delta(s,v)$
- pelo lema do invariante $\delta(s,v) \leq v.d$,
- por transitividade de $\leq$, deduzimos que $\delta(s,y) \leq v.d$

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s,u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v,s)$
- $v \neq s$, $S \neq \emptyset$, $s \rightsquigarrow v$, $p = p_1(x,y)p_2$, $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \rightarrow y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} v$, $p_1 \subseteq S$, $W(p) = \delta(s,v)$, $y.d = \delta(s,y)$, $\delta(s,y) \leq v.d$

Correção

Cada vez que u é inserido em S, $u.d = \delta(s,u)$ (contradição).

- v: primeiro vértice inserido em S t.q. $v.d \neq \delta(v,s)$
- $v \neq s$, $S \neq \emptyset$, $s \rightsquigarrow v$, $p = p_1(x,y)p_2$, $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \rightarrow y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} v$, $p_1 \subseteq S$, $W(p) = \delta(s,v)$, $y.d = \delta(s,y)$, $\delta(s,y) \leq v.d$
- $v = \textsc{Extract-Min}(Q)$
- logo $v.d \leq y.d$
- temos $v.d \geq \delta(s,v) \geq \delta(s,y) = y.d \geq v.d$
- logo $v.d = \delta(s,v)$ entramos em contradição

Teorema

Teorema (Correção do algoritmo de Dijkstra)

O algoritmo SINGLE-SOURCE-SHORTEST-PATH(G, s) *calcula corretamente o custo dos caminhos de custo mínimo de* s *até cada vértice de* G.

Teorema

Teorema (Correção do algoritmo de Dijkstra)

O algoritmo SINGLE-SOURCE-SHORTEST-PATH(G, s) *calcula corretamente o custo dos caminhos de custo mínimo de* s *até cada vértice de* G.

Demonstração.

- o lema do invariante garante que $v.d \geq \delta(s, v)$ ao longo da execução
- mostramos que quando um vértice é inserido em S, $v.d = \delta(s, v)$
- todos os vértices são inseridos em S.

□

Teorema

Teorema (Correção do algoritmo de Dijkstra)

O algoritmo SINGLE-SOURCE-SHORTEST-PATH(G, s) *calcula corretamente o custo dos caminhos de custo mínimo de* s *até cada vértice de* G.

Demonstração.

- o lema do invariante garante que $v.d \geq \delta(s, v)$ ao longo da execução
- mostramos que quando um vértice é inserido em S, $v.d = \delta(s, v)$
- todos os vértices são inseridos em S.

□

Omitimos a prova que os caminhos de custo mínimo são calculados corretamente (atributo *up*).

Algoritmo de Bellman-Ford

Princípios

- leva em conta arestas negativas
- detecta e reporta se existe ciclos de custo mínimo negativo
- também baseado na relaxação

Algoritmo de Bellman-Ford

```
SINGLE-SOURCE-SHORTEST-PATHS(G, s)
1  INIT-RELAX(G, s)
2  for i = 1 to |G.V| − 1
3        for (u, v) ∈ G.E
4              RELAX(u, v, G.W)
5  for (u, v) ∈ G.E
6        if v.d > u.d + G.W(u, v)
7              return FALSE
8  return TRUE
```

Ilustração

Algoritmo de Bellman-Ford

No quadro

```
SINGLE-SOURCE-SHORTEST-PATHS(G, s)
1  INIT-RELAX(G, s) // Θ(V)
2  for i = 1 to |G.V| − 1 // Θ(V) repetições
3       for (u, v) ∈ G.E // Θ(E) repetições
4            RELAX(u, v, G.W) // Θ(1)
5  for (u, v) ∈ G.E // O(E) repetições
6       if v.d > u.d + G.W(u, v)
7            return FALSE
8  return TRUE
```

SINGLE-SOURCE-SHORTEST-PATHS(G, s)

```
1  INIT-RELAX(G, s) // Θ(V)
2  for i = 1 to |G.V| − 1 // Θ(V) repetições
3        for (u, v) ∈ G.E // Θ(E) repetições
4              RELAX(u, v, G.W) // Θ(1)
5  for (u, v) ∈ G.E // O(E) repetições
6        if v.d > u.d + G.W(u, v)
7              return FALSE
8  return TRUE
```

Total: $\Theta(V\,E)$

1. caso G não contem ciclos de custo negativo
2. caso geral

Lema (Bellman-Ford sem ciclos de custo negativo)

Se G não possui ciclos de custo negativo, então, após executar o algoritmo de Bellman-Ford com G e s, temos que $v.d = \delta(s, v)$ para todas as arestas alcançáveis de s.

Lema (Bellman-Ford sem ciclos de custo negativo)

Se G não possui ciclos de custo negativo, então, após executar o algoritmo de Bellman-Ford com G e s, temos que $v.d = \delta(s, v)$ para todas as arestas alcançáveis de s.

Demonstração.

- Seja $p = (v_0, v_1, \ldots v_k)$ um caminho de custo mínimo entre $v_0 = s$ e $v_k = v$
- Não há ciclos de custo negativo, logo p não contem ciclo e $k \leq |V| - 1$.
- Abordagem de prova:
  - indução
  - após a iteração i, $v_i.d = \delta(s, v_i)$
  - como há $|V| - 1$ iterações, provar esta propriedade é suficiente.

Lema (Bellman-Ford sem ciclos de custo negativo)

Se G não possui ciclos de custo negativo, então, após executar o algoritmo de Bellman-Ford com G e s, temos que $v.d = \delta(s, v)$ para todas as arestas alcançáveis de s.

Demonstração.

- Seja $p = (v_0, v_1, \ldots v_k)$ um caminho de custo mínimo entre $v_0 = s$ e $v_k = v$, $k \leq |V| - 1$

□

Lema (Bellman-Ford sem ciclos de custo negativo)

Se G não possui ciclos de custo negativo, então, após executar o algoritmo de Bellman-Ford com G e s, temos que $v.d = \delta(s, v)$ para todas as arestas alcançáveis de s.

Demonstração.

- Seja $p = (v_0, v_1, \ldots v_k)$ um caminho de custo mínimo entre $v_0 = s$ e $v_k = v$
- No caso de base, $i = 0$,
  - $\delta(s, v_0) = v_0.d = 0$ após a inicialização;
  - mantido pelas etapas de relaxação

Lema (Bellman-Ford sem ciclos de custo negativo)

Se G não possui ciclos de custo negativo, então, após executar o algoritmo de Bellman-Ford com G e s, temos que $v.d = \delta(s, v)$ para todas as arestas alcançáveis de s.

Demonstração.

- Seja $p = (v_0, v_1, \ldots v_k)$ um caminho de custo mínimo entre $v_0 = s$ e $v_k = v$
- No caso geral, a hipótese de indução é $v_{i-1}.d = \delta(s, v_{i-1})$ após a iteração $i - 1$.
- A relaxação é aplicada a (v_{i-1}, v_i) na iteração i,
- pelo lema da extensão de caminhos de custo mínimo, $v_i.d = \delta(s, v_i)$ após a iteração i.

Corolário (Alcançabilidade e Bellman-Ford sem ciclos de custo negativo)

Se G não possui ciclos de custo negativo, então, existe um caminho de s até v se e somente se, após executar o algoritmo de Bellman-Ford a G e s, temos que $v.d \neq \infty$.

Teorema (Correção do algoritmo de Bellman-Ford)

Se G não possui ciclos de custo negativo, então o algoritmo retorna TRUE *e $v.d = \delta(s, v)$ para todo $v \in V$.*
Se G possui um ciclo de custo negativo, então o algoritmo retorna FALSE.

Demonstração.

- Se G não possui ciclos de custo negativo
  - Se v é alcançável, temos $v.d = \delta(s, v)$ (aplicação do lema)
  - Se v não é alcançável, também $v.d = \delta(s, v)$ (corolário dos vértices inalcançáveis)
- Quando o laço das relaxações termina:
  $v.d = \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + W(u, v) = u.d + W(u, v)$
- o teste $v.d > u.d + W(u, v)$ nunca é verdadeiro
- o algoritmo retorna $\textsc{True}$

Demonstração.

- Se G possui um ciclo de custo negativo $c = (v_0, v_1, \ldots v_k)$, com $v_0 = v_k$, alcançável a partir de s.
- $\sum_{i=1}^{k} W(v_{i-1}, v_i) < 0$
- (por contradição) hipótese: algoritmo retorna $\textsc{True}$
- logo $v_i.d \leq v_{i-1}.d + W(v_{i-1}, v_i)$ para todo $i = 1, \ldots k$
- $\sum_{i=1}^{k} v_i.d \leq \sum_{i=1}^{k}(v_{i-1}.d + W(v_{i-1}, v_i))$
- como é um ciclo: $\sum_{i=1}^{k} v_i.d = \sum_{i=1}^{k} v_{i-1}.d$
- conclusão $0 \leq \sum_{i=1}^{k} W(v_{i-1}, v_i)$, contradizendo $\sum_{i=1}^{k} W(v_{i-1}, v_i) < 0$.