Aula 25: Grafos: algoritmos elementares (II)

David Déharbe
Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemática Aplicada

Download me from `http://DavidDeharbe.github.io`

Plano

Ordenação topológica

Componentes fortemente conectados

Referência: Cormen, cap 23.

Ordenação topológica

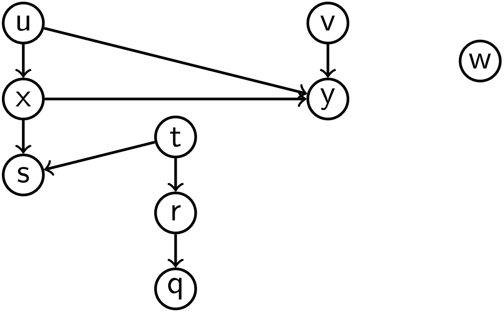
- Grafos dirigidos acíclicos indicam uma relação de precedência
  - $u \prec v$: u vem antes de v, aresta (u, v)
  - relação parcial
  - exemplos: pré-requisitos entre componentes curriculares, entre tarefas, etc.
- Ordenação topológica:
  - entrada: uma relação de precedência
  - saída: um "escalonamento" dos vértices que respeita a precedência
- exemplo: grade curricular

Definição

Definição (Grafo dirigido acíclico, DAG)

Um *grafo dirígido acíclico*, ou *DAG*[1] é um grafo dirigido G tal que se existe uma aresta dirigda de (u, v), então não existe caminho de v até u.

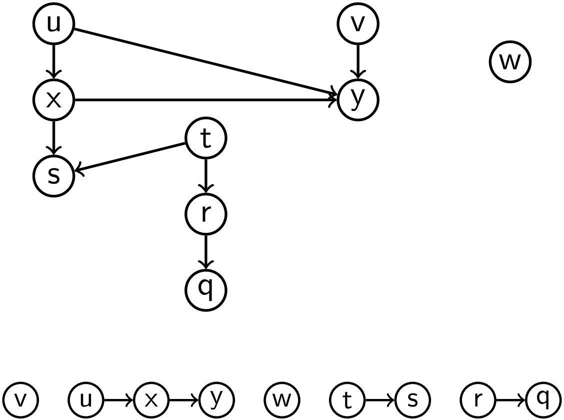
Não há cíclo em DAGs.



[1] Do inglês *Directed Acyclic Graph*.

Exemplo

Ordenação topológica



- Aplicar DFS;
- Retornar a lista dos vértices em ordem decrescente do atributo f.

TOPOLOGICAL-SORT(G)

  aplique DFS a G
  inserindo cada v na cabeça de uma lista quando é finalizado
  return a lista dos vértices

$\textsc{Topological-Sort}(G)$

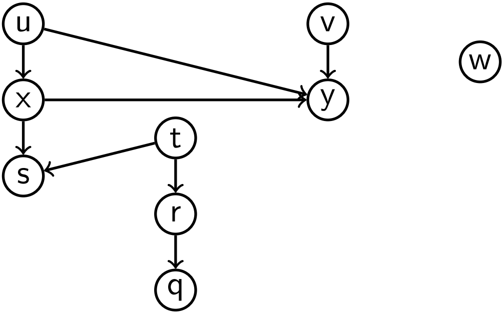
- **for** $v \in G.V$
  - $v.\mathit{visited} = \textsc{False}$
- $l = \textsc{Empty-List}$
- **for** $v \in G.V$
  - **if** $\neg v.\mathit{visited}$
    - $\textsc{Topological-Sort-Visit}(v)$
- **return** l

$\textsc{Topological-Sort-Visit}(v, l)$

- $v.\mathit{visited} = \textsc{True}$
- **for** $w \in v.\mathit{adj}$
  - **if** $\neg w.\mathit{visited}$
    - $\textsc{Topological-Sort-Visit}(v, l)$
- $l = \textsc{Push-Front}(v, l)$

Algoritmo

Exemplo



- DFS: $\Theta(|V| + |E|)$
- $+\ \Theta(1)$ cada inserção de vértice $\equiv \Theta(|V|)$
- $= \Theta(|V| + |E|)$

1. Lema: caracterização de DAG por arestas
2. Teorema: correção do algoritmo proposto

Aciclicidade e arestas

Lema (Arestas e DAG)

Um grafo dirigido $G = (V, E)$ é acíclico (um DAG) se e somente se qualquer aplicação de $\mathrm{DFS}(G)$ encontra nenhuma aresta de volta.

Aciclicidade e arestas

Lema (Arestas e DAG)

Um grafo dirigido $G = (V, E)$ *é acíclico (um DAG) se e somente se qualquer aplicação de* $\mathrm{DFS}(G)$ *encontra nenhuma aresta de volta.*

Plano de prova

- ($\Leftarrow$) nenhuma aresta de volta $\Rightarrow$ nenhum ciclo
- ($\Rightarrow$) nenhum ciclo $\Rightarrow$ nenhuma aresta de volta

Demonstração.

($\Leftarrow$) nenhuma aresta de volta $\Rightarrow$ nenhum ciclo

$\equiv$ ciclo $\Rightarrow$ aresta de volta

- G possui um ciclo c
- seja v o primeiro vértice de c encontrado em uma busca em profundidade
- seja (u, v) a aresta de c chegando em v
- pelo teorema do caminho branco: na etapa $v.d$, há um caminho branco até u
- u torna-se um descendente de v na floresta em profundidade
- logo, (u, v) é uma aresta de volta.

Demonstração.

$$(\Rightarrow) \text{ nenhum ciclo} \Rightarrow \text{nenhuma aresta de volta}$$
$$\equiv$$
$$\text{aresta de volta} \Rightarrow \text{ciclo}$$

- seja (u, v) uma aresta de volta.
- logo v é um ancestro de u na floresta de profundidade.
- então há um caminho de v até v, passando por u: é um ciclo

$\square$

Teorema (Correção do algoritmo TOPOLOGICAL-SORT)

TOPOLOGICAL-SORT(G) *produz uma ordenação topológica de um grafo dirigido acíclico* G.

Correção de Topological-Sort

Demonstração.

- Basta mostrar que: em um DAG, se há uma aresta (u, v), então $v.f < u.f$.
- (u, v) não é uma aresta de volta
- Quando encontrado, v é branco ou preto
  - se v for branco, é um descendente de u e $v.f < u.f$
  - se v for preto, já foi finalizado e $v.f < u.d < u.f$.

$\square$

Componentes fortemente conectados

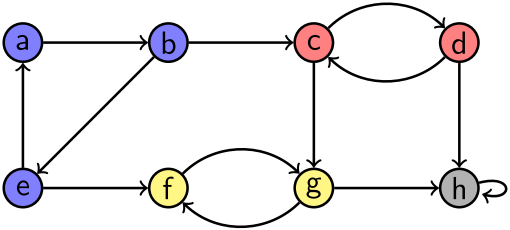
- SCC: *Strongly connected components*
- Decomposição de um grafo dirigido em grafos menores
- Permite, para alguns problemas de grafos, aplicar estratégia de divisão e conquista.

Definição

- Notação: $u \rightsquigarrow v$ existe um caminho de u até v

Definição (Componente fortemente contectado)

Um *componente fortemente conectado* de um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto máximo de vértices $U \subseteq V$ tal que para qualquer $(u, v) \in U^2$, então $u \rightsquigarrow v$ e $v \rightsquigarrow u$.

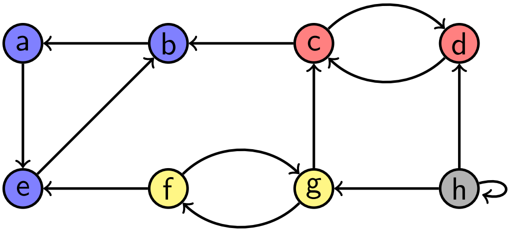


Matriz transposta

O algoritmo para encontrar os SCC de G utiliza o grafo transposto de G.

Definição (Grafo transposto)

O *grafo transposto* de um grafo dirigido $G = (V, E)$ é o grafo dirigido $G^T = (V, E^T)$, onde $E^T = \{(u, v) | (v, u) \in E\}$.

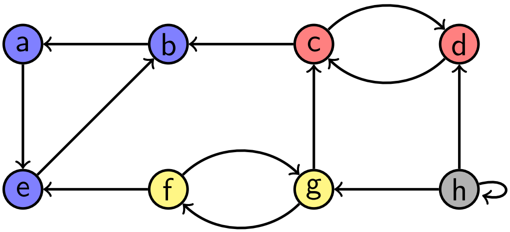


Matriz transposta

O algoritmo para encontrar os SCC de G utiliza o grafo transposto de G.

Definição (Grafo transposto)

O *grafo transposto* de um grafo dirigido $G = (V, E)$ é o grafo dirigido $G^T = (V, E^T)$, onde $E^T = \{(u, v) | (v, u) \in E\}$.



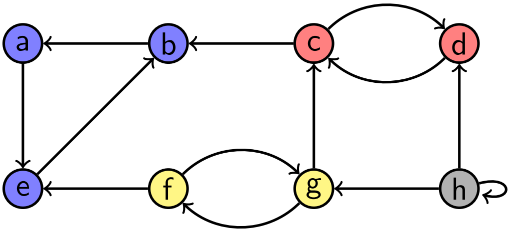
Complexidade?

Matriz transposta

O algoritmo para encontrar os SCC de G utiliza o grafo transposto de G.

Definição (Grafo transposto)

O *grafo transposto* de um grafo dirigido $G = (V, E)$ é o grafo dirigido $G^T = (V, E^T)$, onde $E^T = \{(u, v) | (v, u) \in E\}$.



Complexidade?$\Theta(|V| + |E|)$

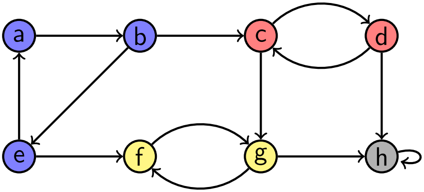
Algoritmo

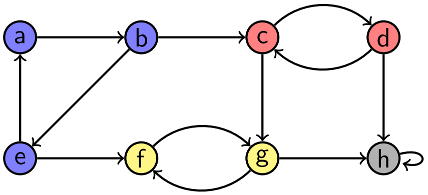
As etapas principais

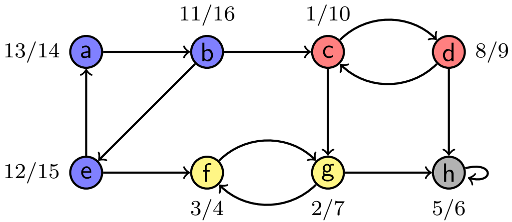
```
GRAPH-SCC(G)
DFS(G)
G^T = GRAPH-TRANSPOSE(G)
DFS(G^T) t. q. laço principal processa vértices por f decrescente
cada árvore da floresta de profundidade resultado é um SCC
```

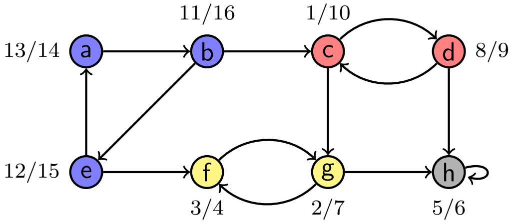
Ilustração

Algoritmo

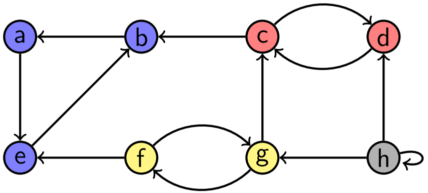



a
b
c
d
e
f
g
h

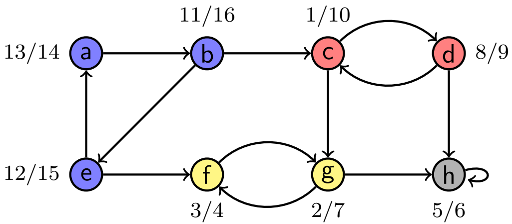

13/14
a
11/16
b
1/10
c
d
8/9
12/15
e
f
3/4
g
2/7
h
5/6



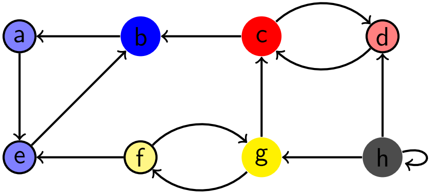
11/16
1/10
13/14
a
b
c
d
8/9
12/15
e
f
g
h
3/4
2/7
5/6



a
b
c
d
e
f
g
h



11/16
1/10
13/14
a
b
c
d
8/9
12/15
e
f
g
h
3/4
2/7
5/6



a
b
c
d
e
f
g
h

Complexidade

Algoritmo

$\textsc{Graph-SCC}(G)$

$\text{DFS}(G)$ // $\Theta(|V| + |E|)$
$G^T = \textsc{Graph-Transpose}(G)$ // $\Theta(|V| + |E|)$
$\text{DFS}(G^T)$ // $\Theta(|V| + |E^T|) = \Theta(|V| + |E|)$

GRAPH-SCC(G)

1 DFS(G) // $\Theta(|V| + |E|)$
2 G^T = GRAPH-TRANSPOSE(G) // $\Theta(|V| + |E|)$
3 DFS(G^T) // $\Theta(|V| + |E^T|) = \Theta(|V| + |E|)$

$$\Theta(|V| + |E|)$$

1. propriedade dos caminhos entre vértices de um mesmo SCC
2. propriedade sobre busca em profundidade e vértices de um SCC
3. noção de antepassado de um vértice em uma busca em profundidade
4. relação entre antepassado na busca e ancestro no grafo
5. propriedade sobre antepassado e SCC
6. propriedade sobre antepassados dos vértices de um mesmo SCC
7. correção do algoritmo

Lema (Caminhos entre vértices de um mesmo SCC)

Seja u e v dois vértices quaisquer de um mesmo SCC. Então todos os vértices nos caminhos entre u e v estão neste mesmo SCC.

Lema (Caminhos entre vértices de um mesmo SCC)

Seja u e v dois vértices quaisquer de um mesmo SCC. Então todos os vértices nos caminhos entre u e v estão neste mesmo SCC.

Demonstração.

Seja w um vértice no caminho de u até v. Logo $u \rightsquigarrow w$.
Precisamos verificar que $w \rightsquigarrow u$.

- Como w está no camino de u até v, então $w \rightsquigarrow v$.
- Como u e v estão no mesmo SCC, $v \rightsquigarrow u$.

Logo $w \rightsquigarrow u$. $\square$

Teorema (Busca em profundidade e vértices de um SCC)

Em qualquer busca em profundidade, todos os vértices em um SCC encontram-se em uma mesma árvore da busca em profundidade.

Teorema (Busca em profundidade e vértices de um SCC)

Em qualquer busca em profundidade, todos os vértices em um SCC encontram-se em uma mesma árvore da busca em profundidade.

Demonstração.

Seja u o primeiro vértice do SCC encontrado na busca em profundidade, e v qualquer outro vértice do SCC.

- na etapa $u.d$, todos os demais vértices do SCC estão brancos
- pelo teorema do caminho branco, v é um descendente de u na floresta de profundidade

Logo, u e v estão na mesma árvore de profundidade. □

- $v.d$ e $v.f$ são os valores obtidos em $\mathrm{DFS}(G)$

Definição (Antepassado em uma busca em profundidade)

Em uma busca em profundidade, para qualquer vértice u, o antepassado de u, denotado $\phi(u)$, é o vértice v tal que $u \rightsquigarrow v$ com o maior valor de f.

- $v.d$ e $v.f$ são os valores obtidos em $\mathrm{DFS}(G)$

Definição (Antepassado em uma busca em profundidade)

Em uma busca em profundidade, para qualquer vértice u, o antepassado de u, denotado $\phi(u)$, é o vértice v tal que $u \rightsquigarrow v$ com o maior valor de f.

- um antepassado por SCC ($\approx$ representante do componente)
- primeiro vértice do SCC descoberto na busca em profundidade de G
- último a ser finalizado
- é a raiz da árvore de profundidade na busca em profundidade de G^T

- $v.d$ e $v.f$ são os valores obtidos em $\mathrm{DFS}(G)$

Definição (Antepassado em uma busca em profundidade)

Em uma busca em profundidade, para qualquer vértice u, o antepassado de u, denotado $\phi(u)$, é o vértice v tal que $u \leadsto v$ com o maior valor de f.

Temos:

1. $u.f \leq \phi(u).f$
2. $u \leadsto v \Rightarrow \phi(v).f \leq \phi(u).f$
3. $\phi(\phi(u)) = \phi(u)$

$u.f \leq \phi(u).f$

- Pois $u \rightsquigarrow u$, e $\forall v | u \rightsquigarrow v \cdot v.f \leq \phi(u).f$

$u \rightsquigarrow v \Rightarrow \phi(v).f \leq \phi(u).f$

- Pois $\{w \cdot v \rightsquigarrow w\} \subseteq \{w \cdot u \rightsquigarrow w\}$

$\phi(\phi(u)) = \phi(u)$

- Pois $\phi(u).f \leq \phi(\phi(u)).f$,
- e, como $u \rightsquigarrow \phi(u)$, então $\phi(\phi(u)).f \leq \phi(u).f$,
- temos $\phi(u).f = \phi(\phi(u)).f$, e
- cada vértice tem um valor de f diferente.

Teorema (Antepassado é ancestro)

Em um grafo dirigido $G = (V, E)$, o antepassado $\phi(u)$ de qualquer $u \in V$ em qualquer busca em profundidadede G, sempre é um ancestro de u.

Teorema (Antepassado é ancestro)

Em um grafo dirigido $G = (V, E)$, o antepassado $\phi(u)$ de qualquer $u \in V$ em qualquer busca em profundidadede G, sempre é um ancestro de u.

Demonstração.

Por caso sobre a cor de $\phi(u)$ na etapa $u.d$ $\square$

Teorema (Antepassado é ancestro)

Em um grafo dirigido $G = (V, E)$, o antepassado $\phi(u)$ de qualquer $u \in V$ em qualquer busca em profundidadede G, sempre é um ancestro de u.

Demonstração.

Por caso sobre a cor de $\phi(u)$ na etapa $u.d$

- Se for GRAY, então $\phi(u)$ é ancestro de u.

$\square$

Teorema (Antepassado é ancestro)

Em um grafo dirigido $G = (V, E)$, o antepassado $\phi(u)$ de qualquer $u \in V$ em qualquer busca em profundidadede G, sempre é um ancestro de u.

Demonstração.

Por caso sobre a cor de $\phi(u)$ na etapa $u.d$

- Se for BLACK, então foi finalizado, e $\phi(u).f < u.f$.
  Contradiz $u.f \leq \phi(u).f$.

□

Teorema (Antepassado é ancestro)

Em um grafo dirigido $G = (V, E)$, o antepassado $\phi(u)$ de qualquer $u \in V$ em qualquer busca em profundidadede G, sempre é um ancestro de u.

Demonstração.

Por caso sobre a cor de $\phi(u)$ na etapa $u.d$

- Se for White, consideramos a cor dos vértices no caminho de u até $\phi(u)$
  - todos são brancos, logo $\phi(u)$ é descendente de u, $\phi(u).f < u.f$: contradição
  - senão, seja t o último vértice não branco do caminho:
    - t não pode ser preto, pois tem um sucessor branco
    - então há um caminho branco de t até $\phi(u)$, e
    - $\phi(u)$ é descendente de t (teorema do caminho branco)
    - logo $t.f > \phi(u).f$
    - contradição por definição de $\phi(u)$ e $u \rightsquigarrow t$.

PPgSC

Corolário (Antepassado e SCC)

Em qualquer busca em profundidade de um grafo dirigido $G = (V, E)$, para qualquer $u \in V$, ambos u e $\phi(u)$ pertencem ao mesmo SCC.

Corolário (Antepassado e SCC)

Em qualquer busca em profundidade de um grafo dirigido $G = (V, E)$, para qualquer $u \in V$, ambos u e $\phi(u)$ pertencem ao mesmo SCC.

Demonstração.

- Por definição de ϕ, temos $u \rightsquigarrow \phi(u)$.
- Pelo teorema "antepassado é ancestro", $\phi(u) \rightsquigarrow u$.

$\square$

Teorema (Antepassados dos vértices de um SCC)

Em um grafo dirigido $G = (V, E)$, os vértices u e v pertencem ao mesmo SCC se, e somente se, possuem o mesmo antepassado na busca em profundidade de G.

Teorema (Antepassados dos vértices de um SCC)

Em um grafo dirigido $G = (V, E)$, os vértices u e v pertencem ao mesmo SCC se, e somente se, possuem o mesmo antepassado na busca em profundidade de G.

Demonstração.

- $(\Rightarrow)$
- $(\Leftarrow)$

$\square$

Teorema (Antepassados dos vértices de um SCC)

Em um grafo dirigido $G = (V, E)$, os vértices u e v pertencem ao mesmo SCC se, e somente se, possuem o mesmo antepassado na busca em profundidade de G.

Demonstração.

- $(\Rightarrow)$ u e v pertencem ao mesmo SCC:
  - logo $\{w \cdot u \rightsquigarrow w\} = \{w \cdot v \rightsquigarrow w\}$.
  - por definição de ϕ, $\phi(u) = \phi(v)$.
- $(\Leftarrow)$

$\square$

Antepassados dos vértices de um SCC

Correção

Teorema (Antepassados dos vértices de um SCC)

Em um grafo dirigido $G = (V, E)$, os vértices u e v pertencem ao mesmo SCC se, e somente se, possuem o mesmo antepassado na busca em profundidade de G.

Demonstração.

- $(\Rightarrow)$
- $(\Leftarrow)$ $\phi(u) = \phi(v)$:
  - pelo corolário "Antepassado e SCC" u e $\phi(u)$ estão no mesmo SCC
  - v e $\phi(v)$ estão no mesmo SCC,
  - logo u e v estão no mesmo SCC.

Intuição do algoritmo

- $\mathrm{DFS}(G)$ marca os antepassados com o maior valor de f (e o menor valor de d) de cada SCC.
- $\mathrm{DFS}(G^T)$
  - começa com um vértice v_1 de maior f, que é um antepassado
  - visita todos os vértices do SCC de v_1
  - continua com um vértice v_2 de maior f entre os não visitados, também é um antepassado
  - visita todos os vértices do SCC de v_2
  - e assim sucessivamente

Teorema (Correção de GRAPH-SCC)

Seja G um grafo dirigido qualquer, GRAPH-SCC(G) *calcula corretamente os componentes fortemente conectados de G.*

Teorema (Correção de GRAPH-SCC)

Seja G um grafo dirigido qualquer, GRAPH-SCC(G) *calcula corretamente os componentes fortemente conectados de G.*

Roteiro da demonstração:

- indução
- número de árvores de profundidade encontrados em DFS(G^T).
- mostramos que, assumindo que as árvores anteriores são SCC, cada nova árvore formada é um SCC
- trivial para a primeira árvore (não existe árvores anteriores)

Prova do teorema da correção

Correção

Demonstração.

- Seja T uma árvore de profundidade de raiz r produzida por $\mathrm{DFS}(G^T)$.
- Seja $C(r) = \{w \cdot \phi(w) = r\}$ (é um SCC)
- Mostramos que u é incluído em T se e somente se $u \in C(r)$
  - $(\Leftarrow)$
  - $(\Rightarrow)$

$\square$

Prova do teorema da correção

Correção

Demonstração.

- Seja T uma árvore de profundidade de raiz r produzida por $\mathrm{DFS}(G^T)$.
- Seja $C(r) = \{w \cdot \phi(w) = r\}$ (é um SCC)
- Mostramos que u é incluído em T se e somente se $u \in C(r)$
  - $(\Leftarrow)$
    - teorema "busca em profundidade e vértices de um SCC"
    - cada vértice em $C(r)$ termina em uma mesma árvore de profundidade
    - como $r \in C(r)$, e r é a raiz de T, então cada elemento de $C(r)$ termina precisamente em T.
  - $(\Rightarrow)$

Demonstração.

- Seja T uma árvore de profundidade de raiz r produzida por $\mathrm{DFS}(G^T)$.
- Seja $C(r) = \{w \cdot \phi(w) = r\}$ (é um SCC)
- Mostramos que u é incluído em T se e somente se $u \in C(r)$
  - $(\Leftarrow)$
  - $(\Rightarrow)$ Mostramos que, para um vértice w, se $\phi(w).f < r.f$, ou $\phi(w).f > r.f$, w não pertence a T

$\square$

Demonstração.

- Seja T uma árvore de profundidade de raiz r produzida por $\mathrm{DFS}(G^T)$.
- Seja $C(r) = \{w \cdot \phi(w) = r\}$ (é um SCC)
- Mostramos que u é incluído em T se e somente se $u \in C(r)$
  - $(\Leftarrow)$
  - $(\Rightarrow)$ Mostramos que, para um vértice w, se $\phi(w).f < r.f$, ou $\phi(w).f > r.f$, w não pertence a T
    - $\phi(w).f < r.f$
    - se w for colocado em T, então $w \rightsquigarrow r$
    - logo, $\phi(w).f \geq \phi(r).f = r.f$
    - contradição

Demonstração.

- Seja T uma árvore de profundidade de raiz r produzida por $\mathrm{DFS}(G^T)$.
- Seja $C(r) = \{w \cdot \phi(w) = r\}$ (é um SCC)
- Mostramos que u é incluído em T se e somente se $u \in C(r)$
  - $(\Leftarrow)$
  - $(\Rightarrow)$ Mostramos que, para um vértice w, se $\phi(w).f < r.f$, ou $\phi(w).f > r.f$, w não pertence a T
    - $\phi(w).f > r.f$
    - por hipótese de indução, quando r for selecionado em $\mathrm{DFS}(G^T)$, $w.f$ terá sido inserido na árvore de raiz $\phi(w)$.
    - um vértice é inserido exatamente em uma árvore.

Exercícios

1. Como pode evoluir a quantidade de SCC em um grafo quando uma aresta é adicionada? removida?
2. Seja G um grafo dirigido. O grafo dos componentes de G é o grafo $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$, tal que V^{SCC} contem um vértice por SCC de G, e E^{SCC} contem a aresta (u, v) se existe uma aresta entre um vértice de u e um vértice de v no grafo G.
   Mostre que o grafo dos componentes conectados de G é um DAG.
3. Escreva um algoritmo que calcula o grafo dos componentes de $G = (V, E)$, com complexidade $O(|V| + |E|)$.
   Nota: o grafo resultado deve ter, ao máximo, uma aresta entre cada par de vértices.
4. Um grafo é semi-conectado se, para qualquer par de vértices (u, v), ou $u \rightsquigarrow v$ ou $v \rightsquigarrow u$.
   Escreva um algoritmo eficiente que testa se um grafo é semi-conectado. Mostre que seu algoritmo é correto.