# Aula 10: Algoritmos de ordenação em arranjos

## Ordenação por *heap*

David Déharbe
Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemática Aplicada

Download me from `http://DavidDeharbe.github.io`.

# Plano da aula

Heap

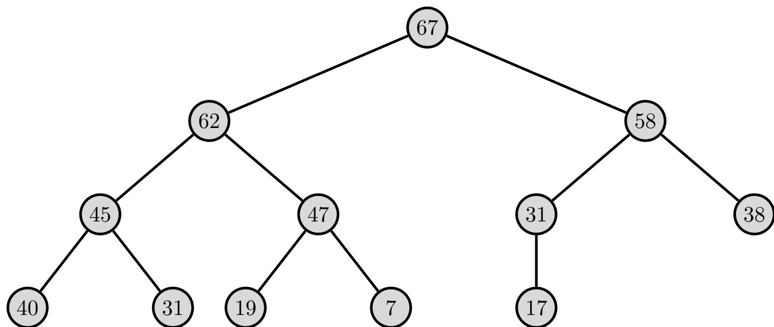
Listas de prioridade

Ordenação

PPgSC

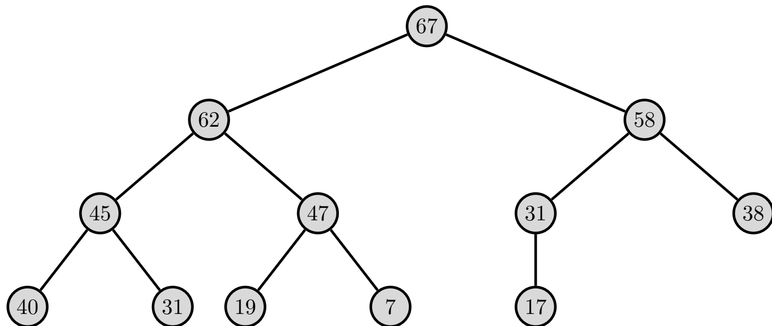
# Introdução

- Ordenação em $\Theta(n \log n)$ (como ordenação por fusão);
- Sem arranjo auxiliar (como ordenação por inserção);
- Baseado no conceito de *heap*.
    - Listas de prioridade

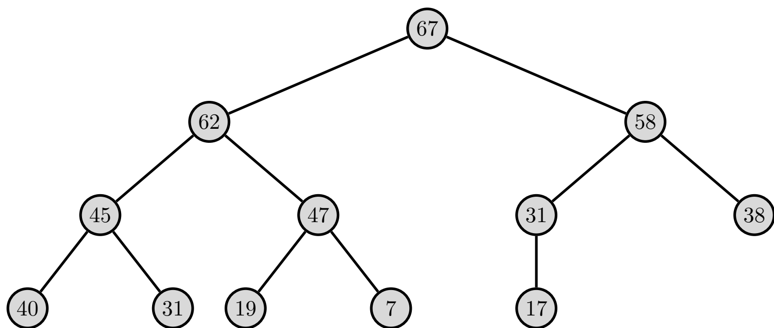



- Árvore binária
  - *value*($N$): valor no nó $N$;
  - *left*($N$): filho esquerdo do nó $N$ (ou NIL);
  - *right*($N$): filho direito do nó $N$ (ou NIL).

PPgSC

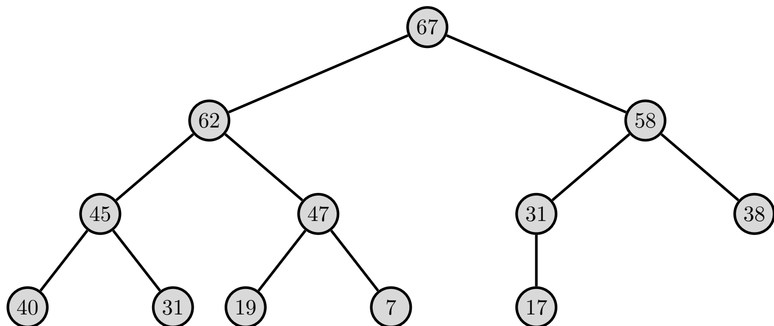



- Árvore binária cheia, e o último nível é preenchido da esquerda para a direita. Propriedade estrutural



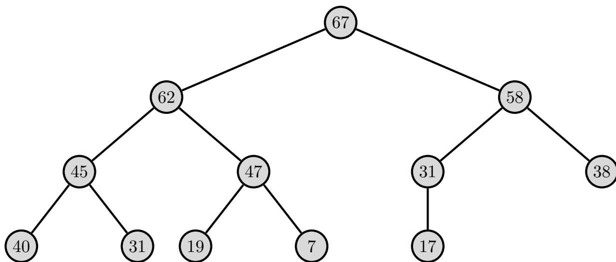

- Em cada nó, o valor é maior ou igual aos valores nos nós filhos
  - Propriedade de ordenação
  - $\forall N \cdot left(N) = \textsc{Nil} \vee value(N) \geq value(left(N));$
  - $\forall N \cdot right(N) = \textsc{Nil} \vee value(N) \geq value(right(N)).$
  - Corolário: o maior valor encontra-se sempre na raiz.

PPgSC




- Seja um *heap* com $n$ elementos.
- Qual é a quantidade máxima de elementos no nível $i$ (assumindo que 1 é o nível da raiz, 2 o nível seguinte, etc.)?
- Qual é a altura máxima do *heap*?
- O que podemos dizer de cada sub-árvore de um *heap*?

PPgSC




- Representação em um arranjo, digamos $A$:
  - seja $N_i$ o nó na posição $i$;
  - $N_i$: $value(N_i) = A[i]$, $left(N_i) = 2i$, $right(N_i) = 2i + 1$, $up(N_i) = \lfloor i/2 \rfloor$.
  - A raiz fica na posição 1.

| 67 | 62 | 58 | 45 | 47 | 31 | 38 | 40 | 31 | 19 | 7 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

A lista de prioridade é uma coleção de elementos com as seguintes operações:

1. Obter elemento de maior prioridade
2. Inserir um novo elemento
3. Retirar o elemento de maior prioridade
4. Construir a lista a partir de uma sequência qualquer inicial

PPgSC

Um arranjo $A$ onde

- $num(A)$: número de elementos na lista
- $size(A)$: capacidade máxima da lista
- $0 \leq num(A) \leq size(A)$
- $\forall i | 2 \leq i \leq num(A) \cdot A(i) \leq A(\lfloor i/2 \rfloor)$
- Exemplo:

| 67 | 62 | 58 | 45 | 47 | 31 | 38 | 40 | 31 | 19 | 7 | 17 | ··· | ··· | ··· | ··· |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

- $num = 12$
- $size = 16$

# *Heap* para listas de prioridade

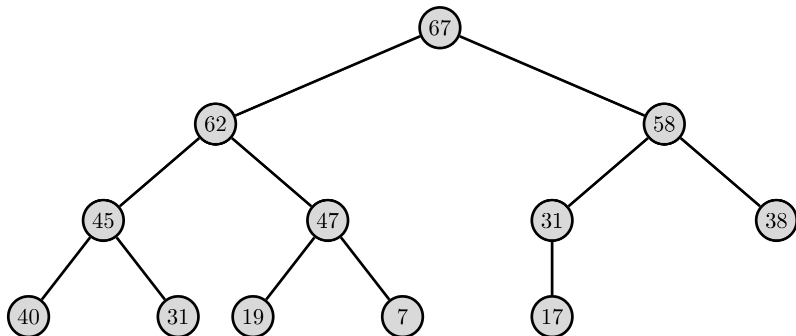
## Obtenção do maior elemento

$\textsc{Get-Max}(H)$

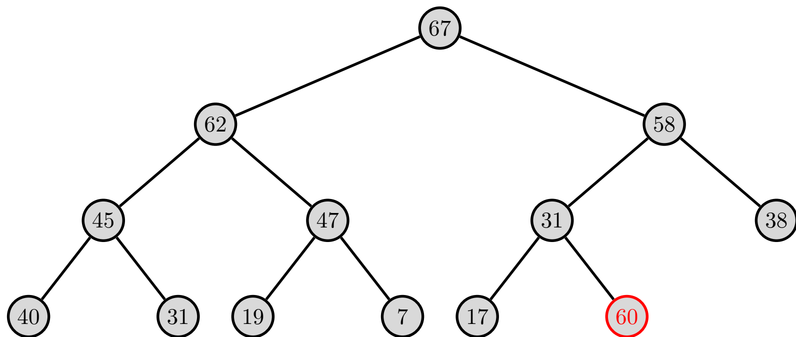
// $H = \langle a_1, \ldots, a_{size(H)} \rangle \wedge 0 < num(H)$

1 **return** $H[1]$

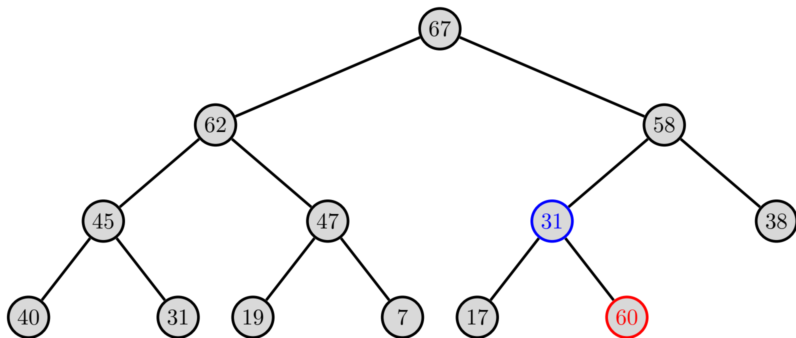
// $r = \mathbf{max}\{a_1, \ldots, a_{num(H)}\}$




- Inserir 60.



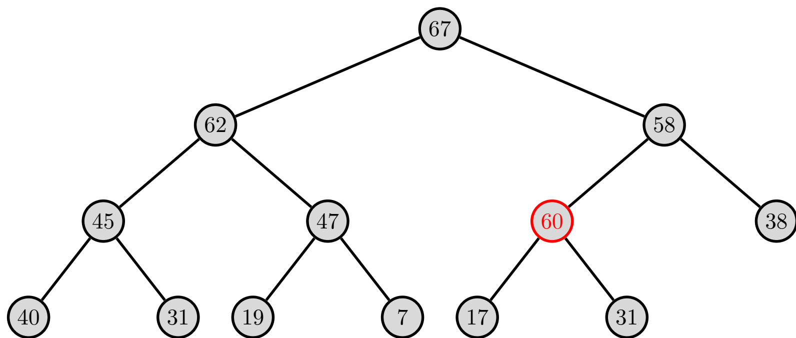

- Restrição: Preservar a propriedade estrutural.
- Criar uma nova folha a direita no último nível.




- Restrição 2: Reestabelecer a propriedade de ordenação.
- Ideia: trocar valores com pai.

# *Heap* para listas de prioridade

## Inserção de um elemento: princípio e exemplo

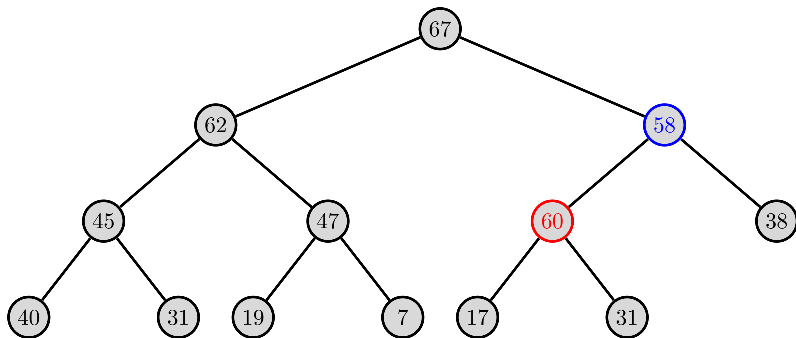


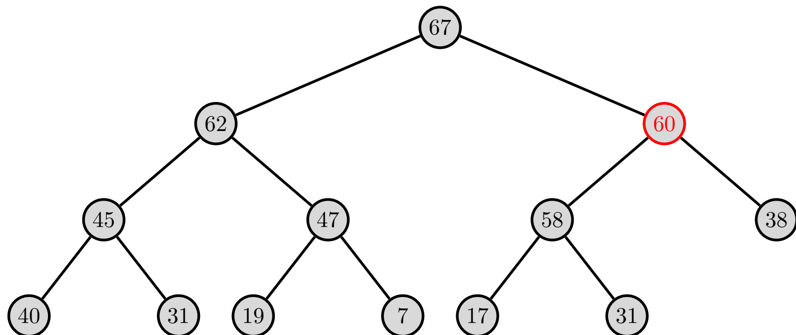

Continuar enquanto o valor “subindo”

- está em um nó com nó pai;
- é maior que o valor do pai.

# *Heap* para listas de prioridade

## Inserção de um elemento: princípio e exemplo






Exercício:

- Desenhar o estado do *heap* após inserir 50, 73, 65.

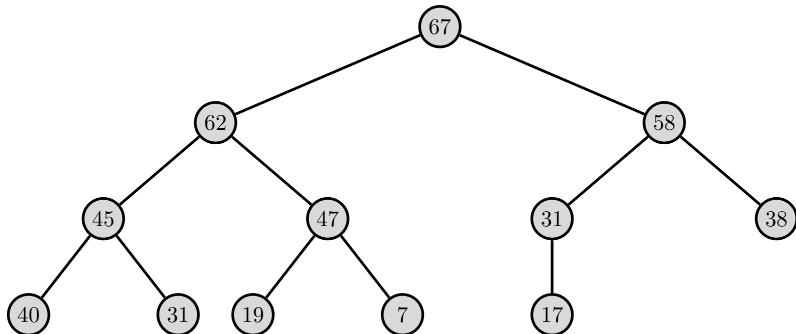
INSERT$(H, v)$

    // $H = \langle a_1, \ldots, a_{size(H)} \rangle \wedge num(H) < size(H)$
1   $num(H) = num(H) + 1$
2   $H[num(H)] = v$
3   SIFT-UP$(H, num(H))$

SIFT-UP$(H, i)$

1   **if** $i > 1$ and $H[i] > H[up(i)]$
2         SWAP$(H, i, up(i))$
3         SIFT-UP$(H, up(i))$

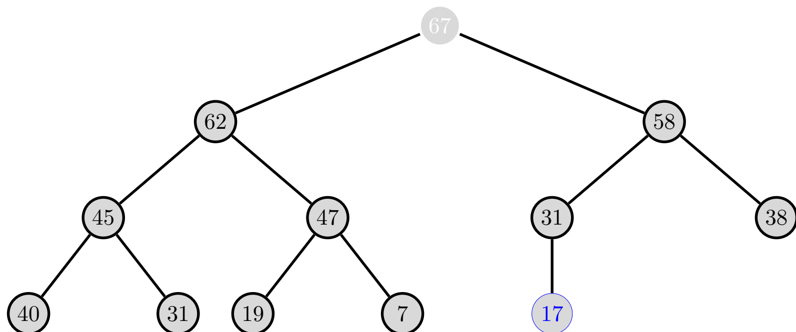
- Complexidade no pior caso
  - Uma chamada por nível da árvore
  - $\Theta(\log Num(H))$




- O elemento 67 deve ser removido.

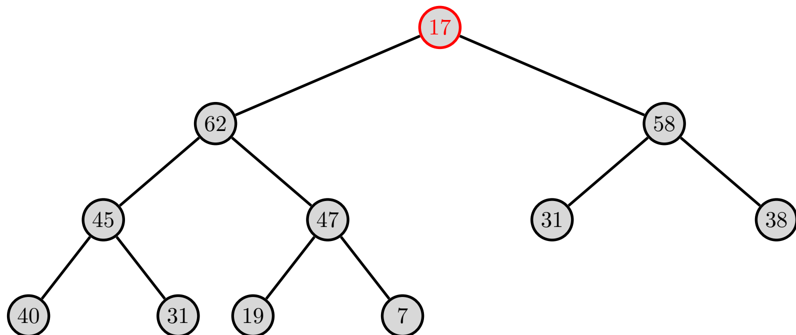
# *Heap* para listas de prioridade

## Remoção do maior elemento: princípio e exemplo

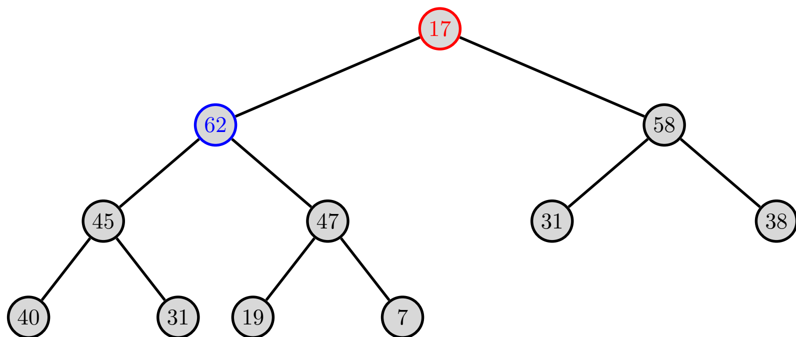



- Restrição: Preserva a propriedade estrutural.
- A folha a mais a direita é o único nó que pode ser removido.
- Mover o elemento nesta para raiz e eliminar o nó.

PPgSC



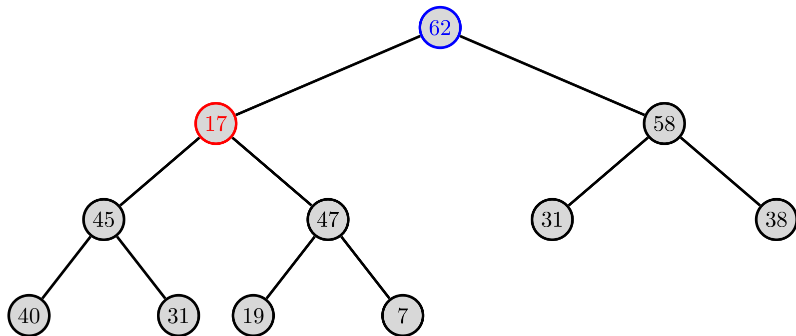

- Restrição 2: Reestabelecer a propriedade de ordenação.




- Restrição 2: Reestabelecer a propriedade de ordenação.
- Ideia: trocar valores com filho que tem maior elemento.

# *Heap* para listas de prioridade

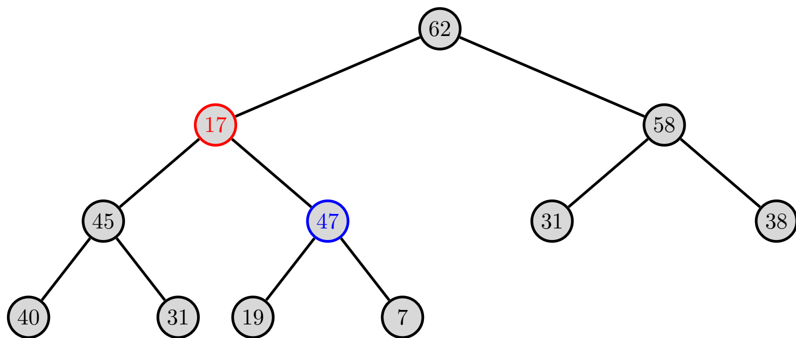
## Remoção do maior elemento: princípio e exemplo




PPgSC

# *Heap* para listas de prioridade

## Remoção do maior elemento: princípio e exemplo

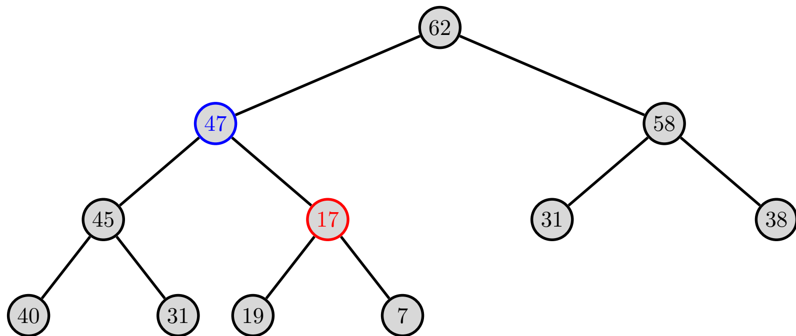



Continuar enquanto o valor “descendo”

- tem um ou dois filhos;
- é menor que o maior dos filhos.

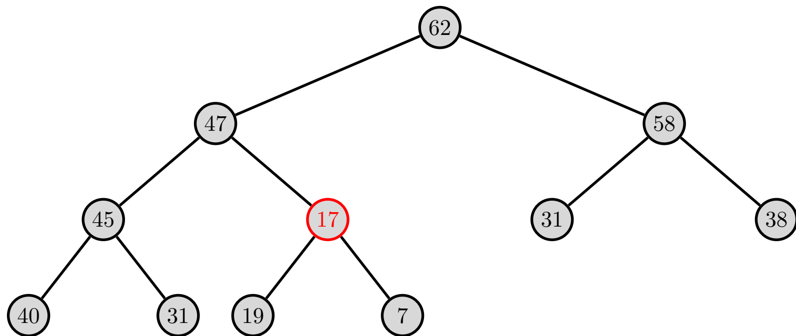
# *Heap* para listas de prioridade

## Remoção do maior elemento: princípio e exemplo



# *Heap* para listas de prioridade

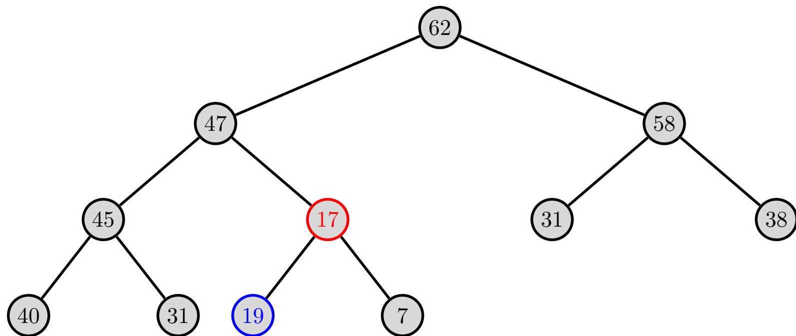
## Remoção do maior elemento: princípio e exemplo




PPgSC

# *Heap* para listas de prioridade

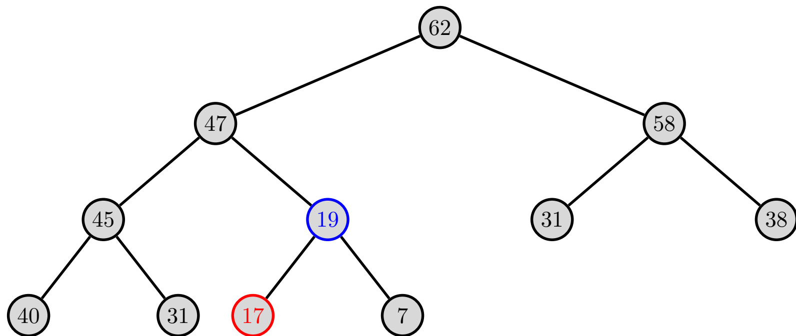
## Remoção do maior elemento: princípio e exemplo




PPgSC

# *Heap* para listas de prioridade

## Remoção do maior elemento: princípio e exemplo



# *Heap* para listas de prioridade

## Remoção do maior elemento: princípio e exemplo



Exercício:

- Desenhar o estado do *heap* após uma, duas, três,... remoções do maior elemento.

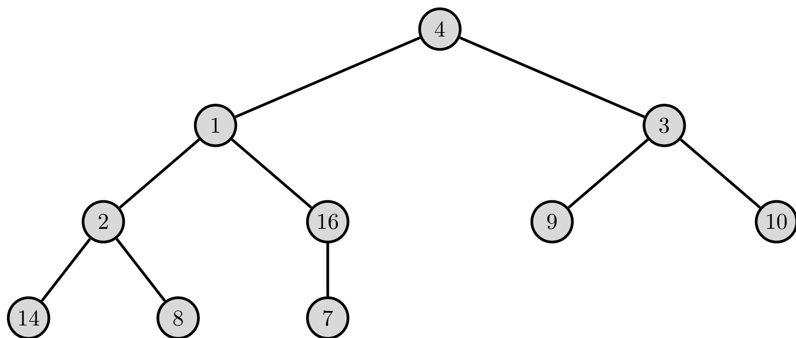
REMOVE-MIN($H$)

// $H = \langle a_1, \ldots, a_{size(H)} \rangle \wedge 0 < num(H)$

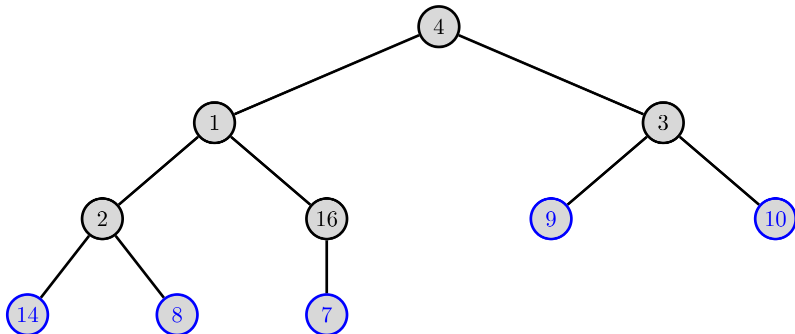
1 $H[1] = H[num(H)]$
2 $num(H) = num(H) - 1$
3 SIFT-DOWN($H, 1$)

```
SIFT-DOWN(H, i)
 1  if LEFT(i) > num(H)
 2       return
 3  elseif LEFT(i) = num(H) and H[i] > H[LEFT(i)]
 4       SWAP(H, i, LEFT(i))
 5  else
 6       if H[LEFT(i)] ≥ H[RIGHT(i)]
 7            m = LEFT(i)
 8       else m = RIGHT(i)
 9       if H[i] > H[m]
10            SWAP(H, i, m)
11            SIFT-DOWN(H, m)
```

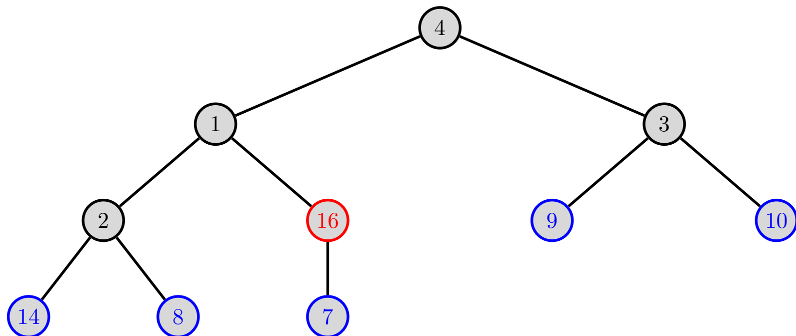
- Complexidade no pior caso
  - Uma chamada por nível da árvore: $\Theta(\log Num(H))$



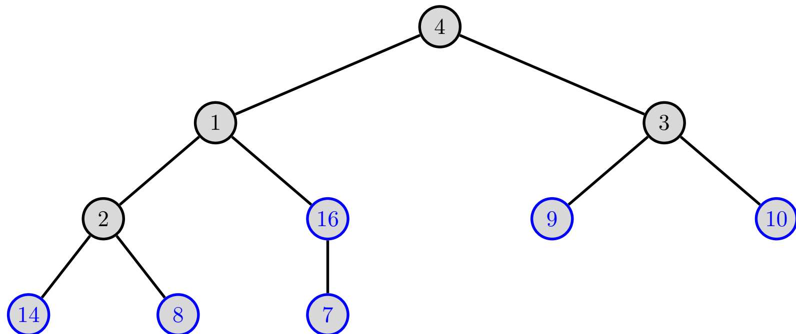

- Considerando uma sequência de valores em uma ordem qualquer, como construir um *heap*?
- Se os valores estão em um arranjo, a propriedade estrutural é inicialmente satisfeita.




- Inicialmente, as folhas formam sub-árvores que são *heaps*.



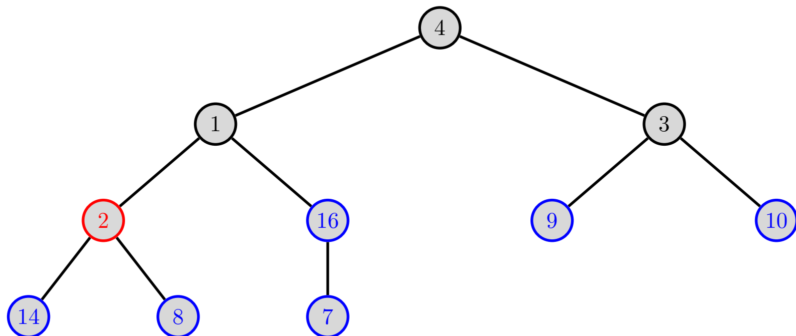

- Cada nó interno cujas sub-árvores são *heaps* é analizado.



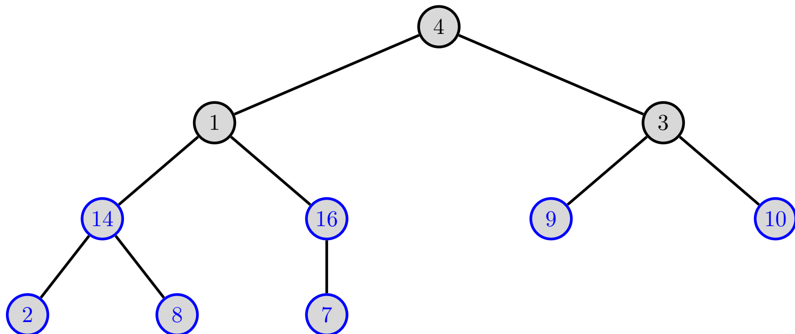

- Se é maior que os filhos, nada é feito.

# *Heap* para listas de prioridade

## Construção



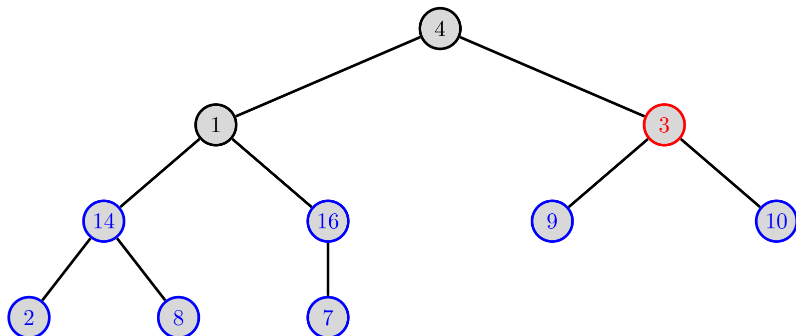

- Senão, a sub-árvore é corrigida aplicando Sift-Down.




- A sub-árvore passa a ser um *heap*.

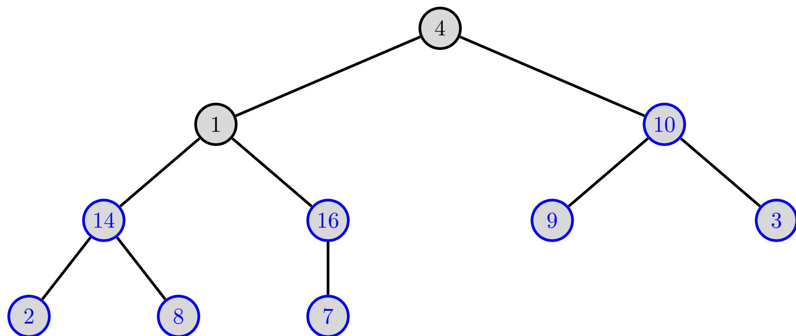
# *Heap* para listas de prioridade

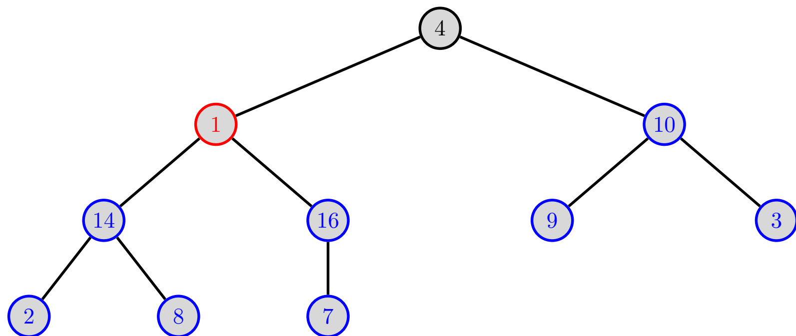
## Construção




- E assim sucessivamente...

# *Heap* para listas de prioridade
## Construção

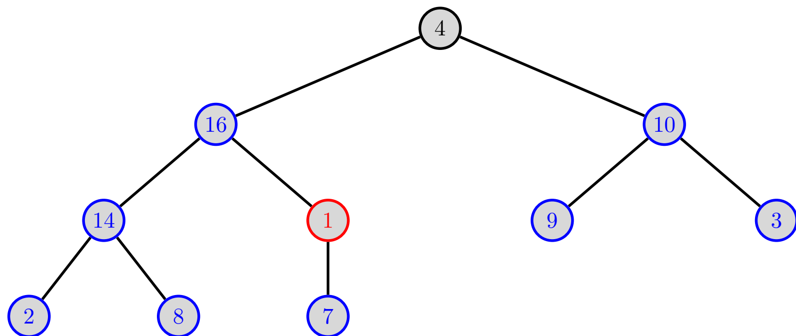




4
1
10
14
16
9
3
2
8
7

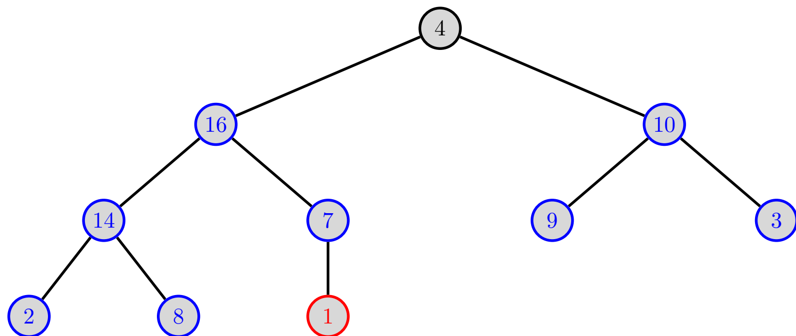
# *Heap* para listas de prioridade

## Construção



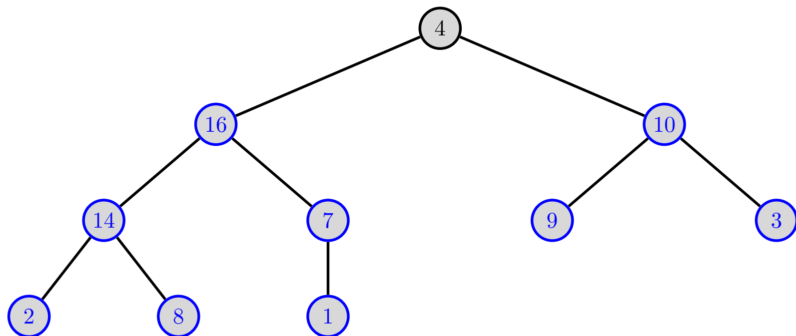
# *Heap* para listas de prioridade

## Construção



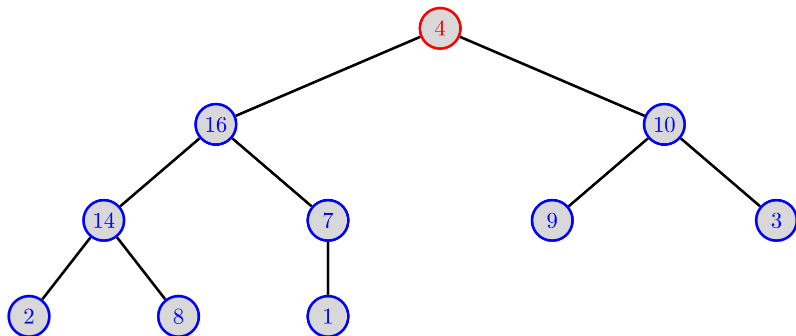
# *Heap* para listas de prioridade

## Construção



# *Heap* para listas de prioridade

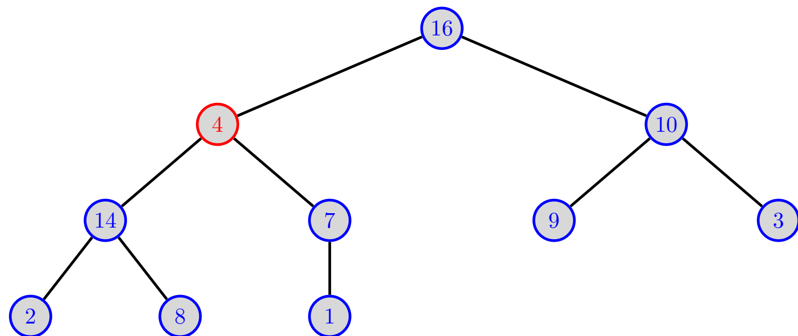
## Construção




PPgSC

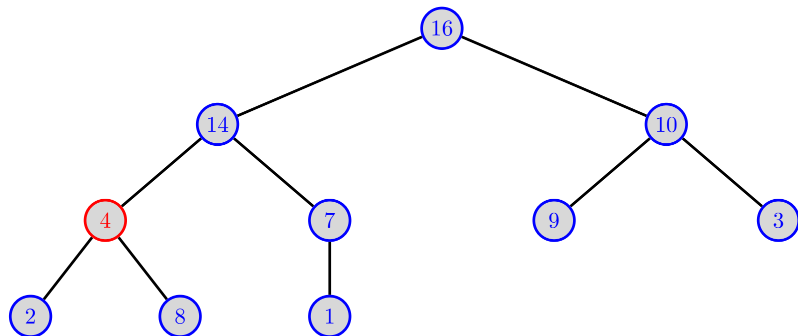
# *Heap* para listas de prioridade

## Construção



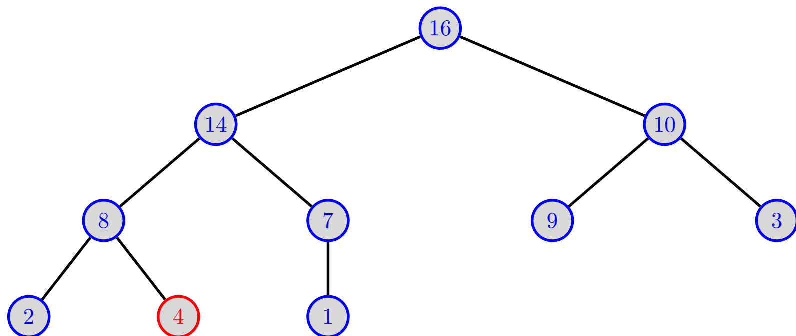
# *Heap* para listas de prioridade

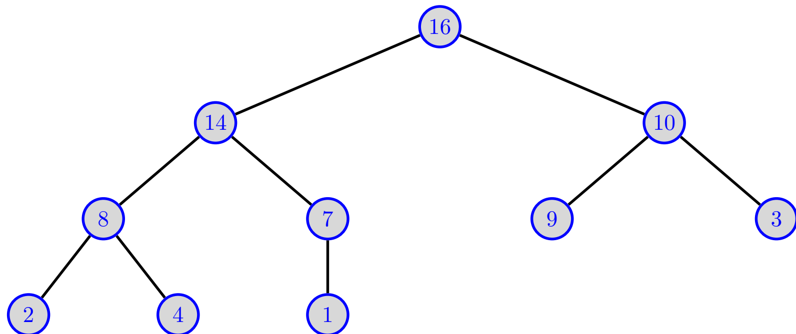
## Construção



# *Heap* para listas de prioridade

## Construção






- Finalmente, o arranjo forma um *heap*.

# *Heap* para listas de prioridade

## Algoritmo de construção

BUILD($H$)

1 **for** $i = num(H)/2$ **downto** 1
2     SIFT-DOWN($H, i$)

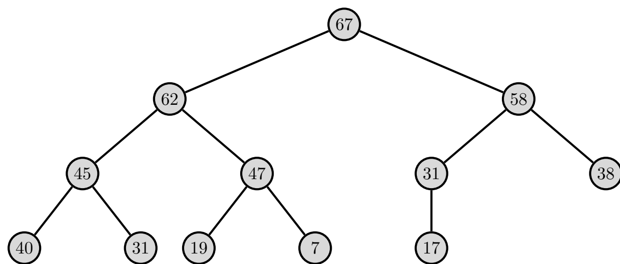
- Complexidade
  - $n$ nós,
  - Há, no máximo, $n/2^{h+1}$ nós na altura $h$,
  - O custo na altura $h$ é $O(h)$,
  - $$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil n/2^{h+1} \rceil O(h) \\ &= O(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} h/2^h) \\ &= O(n \sum_{h=0}^{\infty} h/2^h) \end{aligned}$$
  - progressão geométrica: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$
  - derivada: $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x = 1/2$
  - $T(n) = O(n)$

# Listas de prioridade e *heaps*

## Síntese da complexidade no pior caso

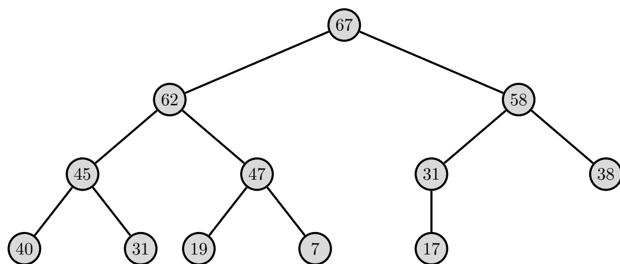
1. Obter elemento de maior prioridade $\Theta(1)$
2. Inserir um novo elemento $\Theta(\lg n)$
3. Retirar o elemento de maior prioridade $\Theta(\lg n)$
4. Construir a lista a partir de uma sequência qualquer inicial $\Theta(n)$

# Ordenação e *heaps*

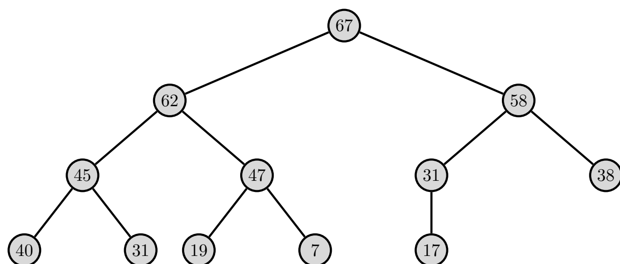



| 67 | 62 | 58 | 45 | 47 | 31 | 38 | 40 | 31 | 19 | 7 | 17 | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

- Como utilizar o conceito de *heap* para ordenar o arranjo em ordem crescente?




- O maior valor está na posição 1 do *heap*.
- Deve ficar na última posição do arranjo ordenado.




- O maior valor está na posição 1 do *heap*.
- Deve ficar na última posição do arranjo ordenado.
- Inverter o conteúdo das posições 1 e $num(H)$.
- Decrementar $num(H)$.
- Reestabelecer a propriedade de ordenação aplicando SIFT-DOWN à posição 1.
- Repetir enquanto $num(H) > 2$.

PPgSC

- Há $\Theta(n)$ chamadas a Sift-Down
- Cada chamada custa $O(\lg n)$.
- Logo o custo total é $O(n \lg n)$