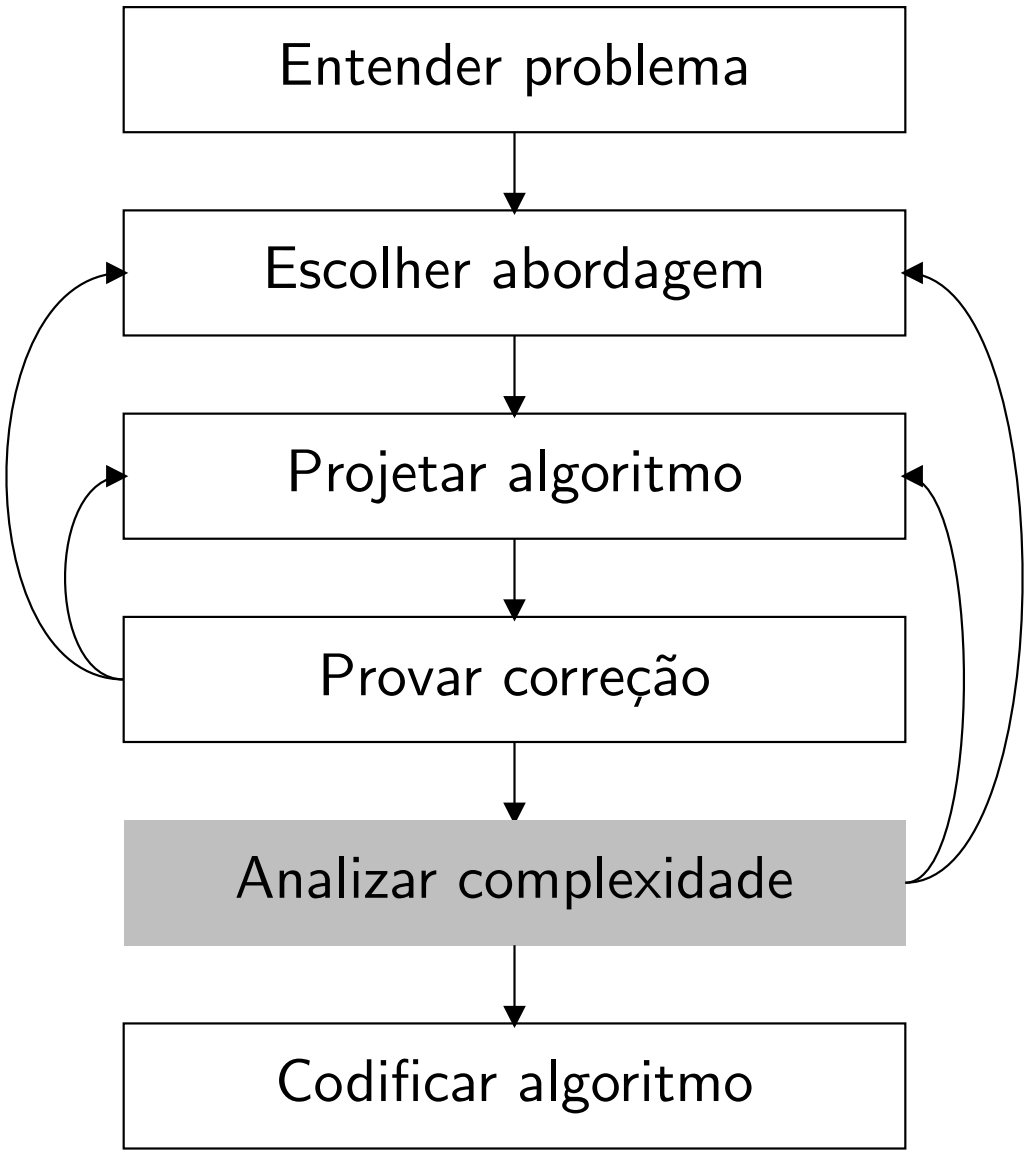
Aula 06: Análise matemática de algoritmos recursivos

David Déharbe
Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemática Aplicada

PPgSC

Contexto



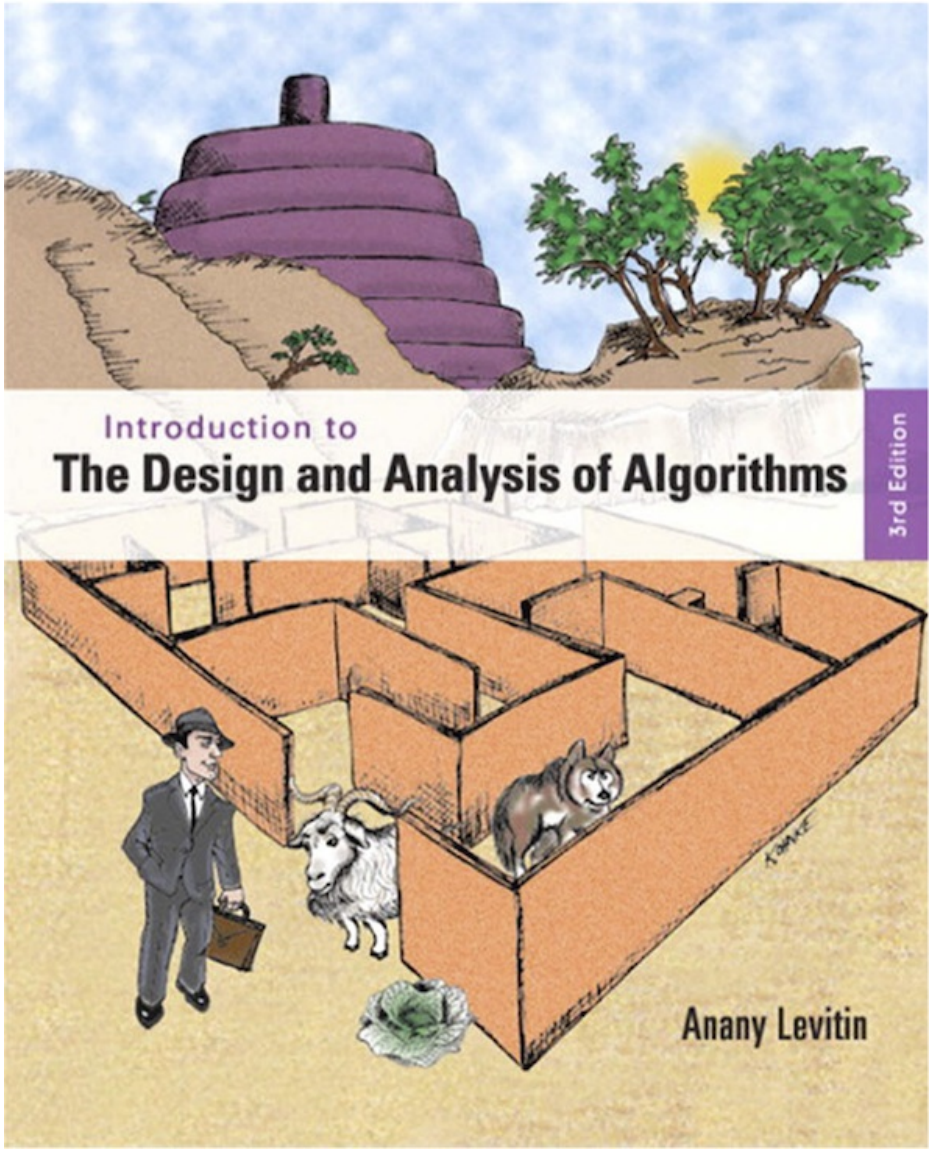
PPgSC

Estrutura da apresentação

1. arcabouço teórico;
2. melhor caso, pior caso, caso médio;
3. notações asintóticas; O, Ω, Θ;
4. análise de algoritmos não recursivos;
5. análise de algoritmos recursivos.

PPgSC

Bibliografia usada



(seções 2.4, 2.5)

PPgSC

Exemplo introdutório

Exemplo (Fatorial)

$\mathrm{F}(n)$

1 **if** $n = 0$ **then return** 1

2 **else return** $n \times F(n-1)$

- Tamanho da entrada: n.
- Operação básica: multiplicação/teste $n = 0$/chamada recursiva
- Seja $M(n)$ o número de multiplicações:
  - $M(n) = 1 + M(n-1)$
  - $M(0) = 0$
- M é definida por recorrência. Como encontrar uma expressão fechada, não recursiva, de $M(n)$?

PPgSC

Plano da aula

Introdução

Um exemplo introdutório

Estratégia de análise

Exemplo 2

Exemplo 3

Interlúdio calculatório

Exemplo 4: A sequência de Fibonacci

PPgSC

Resolução de recorrência por substituição

$$\begin{aligned} M(n) &= 1 + M(n-1) \\ &= 1 + (1 + M(n-2)) = 2 + M(n-2) \\ &= 2 + (1 + M(n-3)) = 3 + M(n-3) \end{aligned}$$

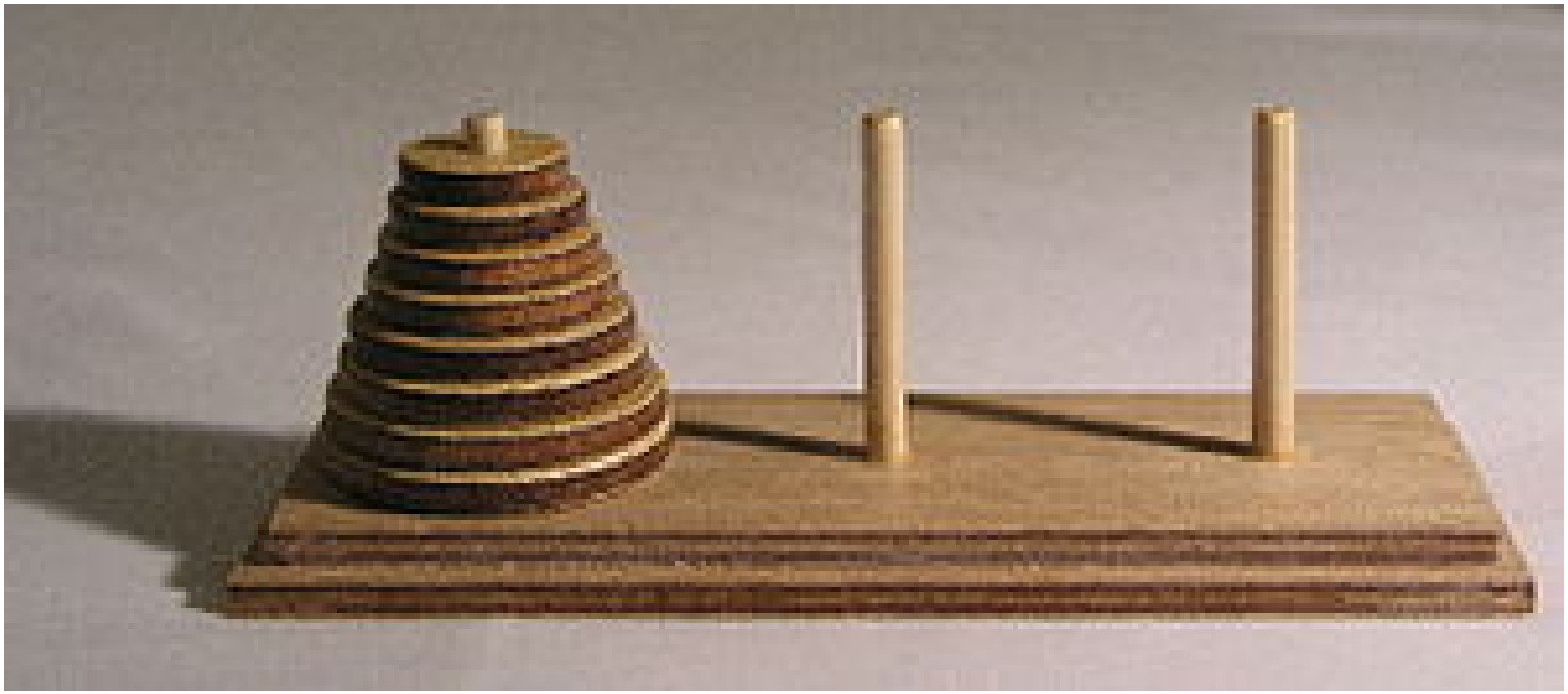
- Conjectura: $M(n) = i + M(n-i)$
- Como é conhecido $M(0) = 0 = M(n-n)$, então $M(n) = n + M(0) = n$.

Estratégia de análise

1. Identificar um parâmetro representando o tamanho da entrada
2. Identificar a operação básica do algoritmo
3. Verificar se o número de vezes que a operação básica é executada pode variar com entradas do mesmo tamanho. Se for o caso, o pior caso, a complexidade média e o melhor caso devem ser averiguados individualmente.
4. Estabelecer uma relação de recorrência que corresponde ao número de vezes que uma operação é executada. Estabelecer o valor inicial também.
5. Resolver a recorrência. Pelo menos, enquadrar o crescimento asintótico da relação.

PPgSC

Torres de Hanoi



A Torre de Hanói é um "quebra-cabeça" que consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. (Wikipedia)

PPgSC

Resolução (recursiva)

```
HANOI(n, src, dest, aux)
1  if n = 1
2        return MOVE(src, dest)
3  else
4        HANOI(n − 1, src, aux, dest)
5        MOVE(src, dest)
6        HANOI(n − 1, aux, dest, src)
```

PPgSC

Aplicação da estratégia

```
HANOI(n, src, dest, aux)
1  if n = 1
2        return MOVE(src, dest)
3  else
4        HANOI(n − 1, src, aux, dest)
5        MOVE(src, dest)
6        HANOI(n − 1, aux, dest, src)
```

- Tamanho da entrada: n
- Operação básica: mover um disco
- $M(n) = M(n-1) + 1 + M(n-1) = 2 \times M(n-1) + 1$ se $n > 1$
- $M(1) = 1$.
- Resolver M.

Aplicação da estratégia

$$
\begin{aligned}
M(n) &= 2 \times M(n-1) + 1 \\
&= 2 \times (2 \times M(n-2) + 1) + 1 = 4 \times M(n-2) + 3 \\
&= 4 \times (2 \times M(n-3) + 1) + 3 = 8 \times M(n-3) + 7 \\
&\cdots \\
&= 2^i \times M(n-i) + (2^i - 1) \\
&\cdots \quad (\text{note que } 1 = n - (n-1)) \\
&= 2^{n-1} \times M(n-(n-1)) + (2^{n-1} - 1) \\
&= 2^{n-1} \times M(1) + 2^{n-1} - 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 \\
&= 2 \times 2^{n-1} - 1 \\
M(n) &= 2^n - 1
\end{aligned}
$$

PPgSC

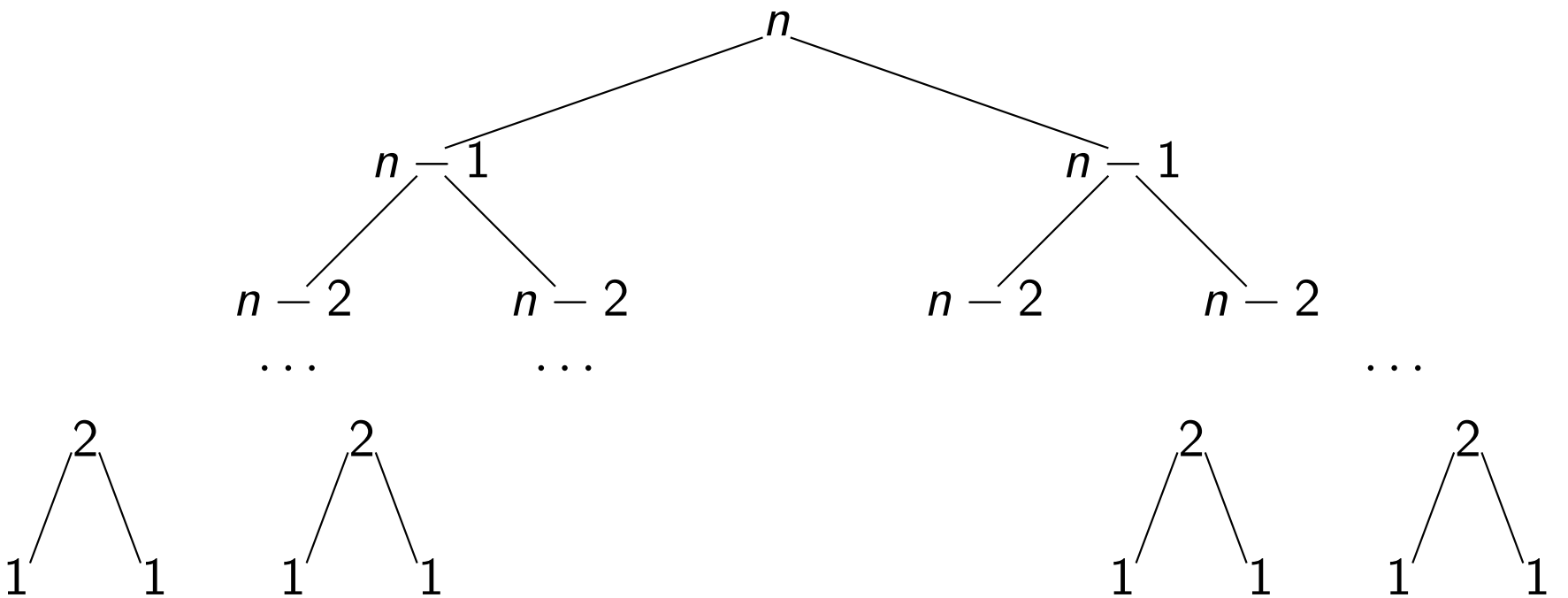
Observações

- A resolução recursiva do problema das Torres de Hanoi cabe em 5 linhas.
- Tem complexidade exponencial
- No caso, não tem solução mais eficiente.
- Mas cuidado: concisão não é sinônimo de eficiência!

PPgSC

Árvore das chamadas recursivas

Permite visualizar todas as chamadas realizadas por um algoritmo recursivo: pode ser útil para analizar a complexidade.



Número de algarismos binários de um inteiro

```
BINARY(n)
1  if n ≤ 1
2        return 1
3  else
4        return BINARY(⌊n/2⌋) + 1
```

Aplicação da estratégia

```
BINARY(n)
1  if n ≤ 1
2        return 1
3  else
4        return BINARY(⌊n/2⌋) + 1
```

- Tamanho da entrada: n
- Operação básica: adição
- $A(n) = 1 + A(\lfloor n/2 \rfloor)$
- $A(1) = A(0) = 0$.
- Resolver A.

- $A(n) = 1 + A(\lfloor n/2 \rfloor)$
- $A(1) = A(0) = 0$.
- Resolver A?

Vamos considerar o caso de $n = 2^k$ (n é potência de 2).

$$\begin{aligned}
A(n) &= 1 + A(\lfloor 2^k/2 \rfloor) = 1 + A(2^{k-1}) \\
&= 1 + (1 + A(\lfloor 2^{k-1}/2 \rfloor) = 2 + A(2^{k-2}) \\
&\dots \\
&= i + A(2^{k-i}) \\
&\dots \\
&= k + A(2^{k-k}) = k + A(2^0) = k + A(1) \\
&= k \\
&= \log_2 n \in \Theta(\log n)
\end{aligned}$$

Resultados matemáticos relevantes

- Teorema Master
- Relações de recorrência de segunda ordem

O teorema Master

Hipóteses

$\Longrightarrow$ http://en.wikipedia.org/wiki/Master_theorem

Considere a sequência $T(n)$ definida pela seguinte relação de recorrência:

$$T(n) \quad = \quad aT(\frac{n}{b}) + f(n), \text{ onde } a \geq 1, b \geq 1$$

Aplicação a algoritmos recursivos:

- n tamanho do problema
- a quantidade de chamadas recursivas
- n/b tamanho dos sub-problemas
- $f(n)$ custo sem contar as chamadas recursivas
  - divisão em sub-problemas,
  - combinação dos resultados parciais.

PPgSC

O teorema Master

$$T(n) \quad = \quad aT(\frac{n}{b}) + f(n), \text{ onde } a \geq 1, b \geq 1$$

1. Se $f(n) \in O(n^c)$ onde $c < \log_b a$, então $T(n) \in \Theta(n^{log_b a})$
2. Se existe $k \geq 0$ tal que $f(n) \in \Theta(n^c \log^k n)$ onde $c = \log_b a$ então $T(n) \in \Theta(n^c \log^{k+1} n)$
3. Se
   - 3.1 $f(n) \in \Omega(n^c)$, onde $c > \log_b a$ e
   - 3.2 (condição de regularidade) $af(\frac{n}{b}) \leq kf(n)$ para $k < 1$ e n suficientemente grande,

   então $T(n) \in \Theta(f(n))$.

CORMEN, LEISERSON, RIVEST, STEIN

O teorema Master

Propriedades: caso 1

$$T(n) \quad = \quad aT(\frac{n}{b}) + f(n), \text{ onde } a \geq 1, b \geq 1$$

- Se $f(n) \in O(n^c)$ onde $c < \log_b a$, então $T(n) \in \Theta(n^{log_b a})$
- Exemplo:

$$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^2$$

  - Temos que: $a = 8, b = 2, f(n) = n^2$,
  - e $f(n) \in O(n^2)$,
  - logo $c = 2 < 3 = \log_2 8 = \log_b a$.
  - Pelo teorema $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$

PPgSC

O teorema Master

Caso 2

$$T(n) \quad = \quad aT(\frac{n}{b}) + f(n), \text{ onde } a \geq 1, b \geq 1$$

- Se existe $k \geq 0$ tal que $f(n) \in \Theta(n^c \log^k n)$ onde $c = \log_b a$ então $T(n) \in \Theta(n^c \log^{k+1} n)$
- Exemplo:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n.$$

  - Temos $a = 2, b = 2$, logo $c = \log_2 2 = 1$,
  - e $f(n) = n \in \Theta(n) = \Theta(n^1.1) = \Theta(n^c \log^k n)$, com $k = 0$,
  - logo $T(n) \in \Theta(n \log n)$.

PPgSC

O teorema Master

Caso 3

$$T(n) \quad = \quad aT(\frac{n}{b}) + f(n), \text{ onde } a \geq 1, b \geq 1$$

- Se
  1. $f(n) \in \Omega(n^c)$, onde $c > \log_b a$ e
  2. (condição de regularidade) $af(\frac{n}{b}) \leq kf(n)$ para $k < 1$ e n suficientemente grande,

  então $T(n) \in \Theta(f(n))$.
- Exemplo

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$$

  - Temos $a = 2, b = 2, f(n) = n^2$,
  - logo $f(n) \in \Omega(n^c)$, onde $c = 2 > \log_b a$,
  - a condição de regularidade $2.(\frac{n}{2})^2 = 2(\frac{n^2}{4}) \leq kn^2$ é satisfeita a partir de $k = \frac{1}{2}$,
  - então $T(n) \in \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$

$$A(n) \quad = \quad A(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$$

Hipóteses do teorema master:

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n), \text{ onde } a \geq 1, b \geq 1$$

- Temos $a = 1$, $b = 2$, $\log_2 1 = 0$, e $n^c = n^0 = 1$
- temos também $f(n) = 1 \in \Theta(n^c \log^k n)$, com $k = 0$,
- logo $A(n) \in \Theta(n^c \log^{k+1} n)$, ou seja $A(n) \in \Theta(\log n)$.

Resolução de relações de recorrência

Recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$a \times x(n) + b \times x(n-1) + c \times x(n-2) = f(n).$$

Caso $f(n) = 0$, então a recorrência é *homogênea*.
A equação $ax^2 + bx + c = 0$ é a *equação característica* da recorrência.

PPgSC

Resolução de relações de recorrência

Teorema

Seja r_1, r_2 as raizes da equação característica de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes.

caso 1 *Se r_1 and r_2 são números reais e distintos, a solução geral é $x(n) = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.*

caso 2 *Se $r_1 = r_2 = r$, uma solução geral é $x(n) = \alpha r^n + \beta n r^n$.*

caso 3 *Se $r_{1,2} = u \pm iv$ são complexos distintos, a solução geral é $x(n) = \gamma^n(\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta)$, onde $\theta = \arctan v/u$, $\gamma = \sqrt{u^2 + v^2}$.*

Em todos os casos α e β são constantes reais.

PPgSC

Sequência de Fibonacci (exemplo)

- É uma sequência infinita, crescente, de números inteiros; `http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number`
- Definição da sequência, por recorrência;
- Aplicação do teorema: formulação não recorrente;
- Análise da complexidade de diferentes algoritmos.

PPgSC

Sequência de Fibonacci (exemplo)

Sequência definida pelo matemático Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

A sequência é definida por recorrência:

- caso geral: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, se $n > 1$,
- condições iniciais: $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$.

Sequência de Fibonacci

- Note que: $F(n) - F(n-1) - F(n-2) = 0$, se $n > 1$.
- É uma relação de recorrência linear homogênea de segunda ordem, com coeficientes constantes.
- Sua equação característica é $x^2 - x - 1 = 0$.
- As raizes são $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- O termo geral é $F(n) = \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.
- Com as condições iniciais, temos $\alpha + \beta = 0$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta = 1$.
- $F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n) \in \Theta(\phi^n)$.

$\phi \approx 1,61803$ e $\hat{\phi} \approx -0,61803$

PPgSC

Sequência de Fibonacci

Exemplo (Fibonacci)

$\textsc{Fib}(n)$

1 **if** $n \leq 1$ **then return** n
2 **else return** $\textsc{Fib}(n-1) + \textsc{Fib}(n-2)$

- tamanho da entrada: n
- operação básica: adição
- custo:
  - caso geral: $A(n) = A(n-1) + A(n-2) + 1$
  - condições gerais: $A(0) = A(1) = 0$.
- resolver $A(n)$...

PPgSC

Sequência de Fibonacci

- Resolver:
  - caso geral: $A(n) = A(n-1) + A(n-2) + 1$
  - condições gerais: $A(0) = A(1) = 0$.
- temos: $A(n) - A(n-1) - A(n-2) = 1$ não é homogênea.
- seja $B(n) = A(n) + 1$: $B(n) - B(n-1) - B(n-2) = 0$ é homogênea!
- mais ainda: $B(n) = F(n+1)$, logo $B(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1}) \in \Theta(\phi^n)$.

PPgSC

Sequência de Fibonacci: versão eficiente

- Sem recursividade

FIB-NR(n)

```
1  F[0] = 0, F[1] = 1
2  for i = 2 to n
3        F[i] = F[i − 1] + F[i − 2]
4  return F[n]
```

- Com recursividade

FIB-ACC(n, k, x, y)

```
1  if n = k then return x + y
2  else return FIB-ACC(n, k + 1, y, x + y)
```

FIB-R(n)

```
1  if n ≤ 1 then return n
2  else return FIB-ACC(n, 2, 0, 1)
```

PPgSC

Exercício

Estabeleça a complexidade de FIB-NR e de FIB-R.