Aula 05: Análise matemática de algoritmos não recursivos

David Déharbe
Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemáica Aplicada

PPgSC

Plano da aula

Introdução

Um exemplo introdutório

Estratégia de análise

Um segundo exemplo

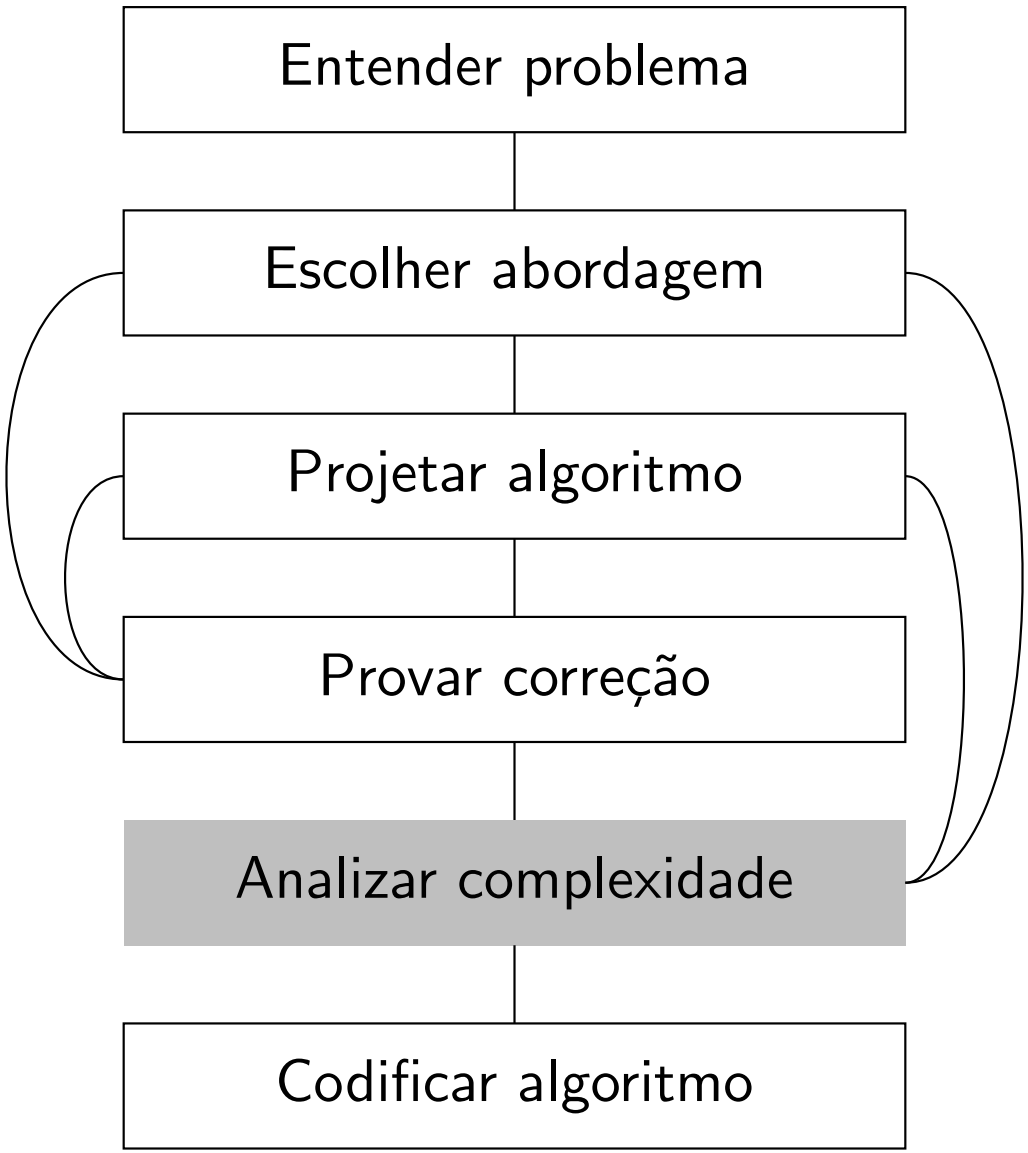
Um terceiro exemplo

Um exemplo não tão simlpes

Prática

PPgSC

Contexto



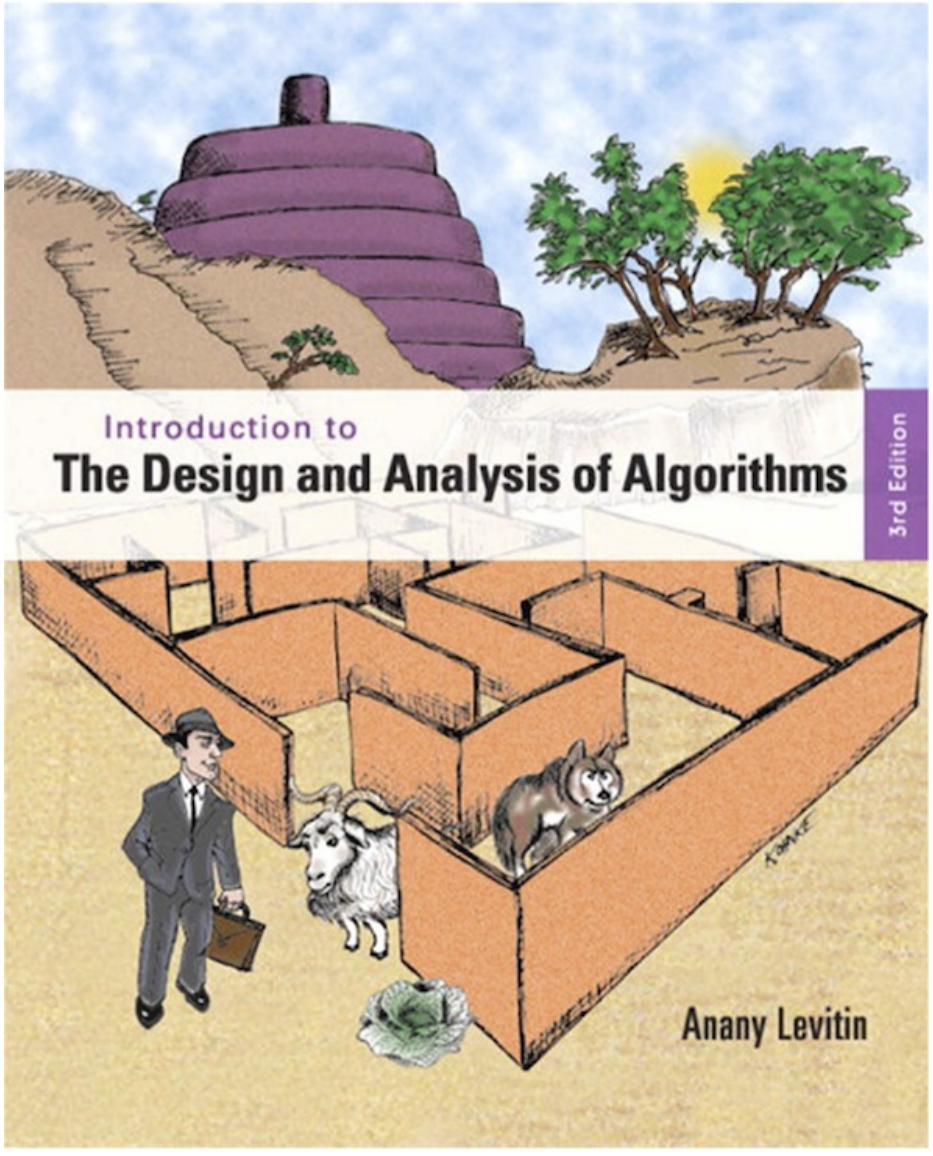
PPgSC

Estrutura da apresentação

1. arcabouço teórico;
2. melhor caso, pior caso, caso médio;
3. notações asintóticas; O, Ω, Θ;
4. análise de algoritmos não recursivos;
5. análise de algoritmos recursivos.

PPgSC

Bibliografia usada



(seção 2.3)

Exemplo

Exemplo (Busca do maior elemento em uma sequência)

MAX-ITEM(A)

```
1   max = A[1]
2   for i = 2 to length[A]
3         if A[i] > max
4               max = A[i]
5   return max
```

Exemplo

```
MAX-ITEM(A)
1   max = A[1]
2   for i = 2 to length[A]
3         if A[i] > max
4               max = A[i]
5   return max
```

- Tamanho da entrada: $length[A]$, digamos n.
- Operações mais executadas: corpo do **for**.
  - A comparação é executada mais vezes que a atribuição
  - A comparação $A[i] > max$ é a *operação básica*
  - O número de comparações executadas é o mesmo para qualquer entrada de tamanho n
    $\Longrightarrow$ Não precisa estudar pior caso, caso médio, nem melhor caso.

PPgSC

Exemplo

```
MAX-ITEM(A)
1   max = A[1]
2   for i = 2 to length[A]
3         if A[i] > max
4               max = A[i]
5   return max
```

Seja $C(n)$ o número de comparações realizadas.

- A cada iteração, é realizada uma (1) comparação.
- $C(n) = \sum_{i=2}^{n} 1 = n - 2 + 1 = n - 1 \in \Theta(n)$.
- (resultado esperado)

PPgSC

Estratégia para analizar complexidade de algoritmos não recursivos

1. Escolher um parâmetro (ou vários) para indicar o tamanho da entrada
2. Identificar a operação básica do algoritmo
3. Verificar se o número de vezes que a operação básica é executada depende apenas do tamanho da entrada
   $\Rightarrow$ Caso contrário, o pior caso, o caso médio e o melhor caso devem ser aferidos individualmente
4. Escreva um somatório que expressa quantas vezes a operação básica é executada
5. Usando as leis da aritmética, encontre uma formulação que só depende de n, ou pelo menos o seu crescimento asintótico.

PPgSC

Propriedades importantes

$$\sum_{i=L}^{U}(c \times a_i) = c \times \left(\sum_{i=L}^{U} a_i\right)$$

$$\sum_{i=L}^{U}(a_i \pm b_i) = \left(\sum_{i=L}^{U} a_i\right) \pm \left(\sum_{i=L}^{U} b_i\right)$$

$$\sum_{i=L}^{U} 1 = U - L + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \times (n+1)}{2} \approx \frac{1}{2} \times n^2 \in \Theta(n^2)$$

PPgSC

Um segundo exemplo

Exemplo (Teste de unicidade dos elementos)

UNICITY-ELEMS(A)

```
1  for i = 1 to length[A] − 1
2        for j = i + 1 to length[A]
3              if A[i] = A[j]
4                    return FALSE
5  return TRUE
```

Aplicação da estratégia

```
UNICITY-ELEMS(A)
1  for i = 1 to length[A] − 1
2       for j = i + 1 to length[A]
3            if A[i] = A[j]
4                 return FALSE
5  return TRUE
```

1. O tamanho da entrada é o número de elementos de A, digamos n.
2. O laço mais interno contem um teste de igualdade. A operação básica é o *teste de igualdade*.
3. O número de testes efetuados não depende só de n, mas também do conteúdo de A. Mas precisamente se tem elementos iguais, e quais posições eles ocupam.
   Vamos nos interessar à complexidade no pior caso: $C_{pior}(n)$.

Aplicação da estratégia

```
UNICITY-ELEMS(A)
1  for i = 1 to length[A] − 1
2       for j = i + 1 to length[A]
3            if A[i] = A[j]
4                 return FALSE
5  return TRUE
```

O pior caso é quando o número de comparações é o maior possível.

1. ou todos os elementos são distintos dois a dois;
2. ou apenas os elementos nas últimas duas posições são iguais.

$$C_{pior}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1$$

PPgSC

Aplicação da estratégia

```
UNICITY-ELEMS(A)
1  for i = 1 to length[A] − 1
2      for j = i + 1 to length[A]
3          if A[i] = A[j]
4              return FALSE
5  return TRUE
```

$$
\begin{aligned}
C_{pior}(n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} n - (i+1) + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} n - i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i = (n-1) \times n - \frac{(n-1) \times n}{2} \\
&= \frac{(n-1) \times n}{2} \approx \frac{1}{2} \times n^2 \in \Theta(n^2)
\end{aligned}
$$

Um terceiro exemplo

Exemplo

Multiplicação de duas matrizes quadradas

MULT-MATRIX(A, B, C)

```
1  for i = 1 to NbLines[A]
2      for j = 1 to NbCols[B]
3          C[i,j] = 0
4          for k = 1 to NbCols[A]
5              C[i,j] = C[i,j] + A[i,k] × B[k,j]
```

Aplicação da estratégia

MULT-MATRIX(A, B, C)

```
1  for i = 1 to NbLines[A]
2      for j = 1 to NbCols[B]
3          C[i,j] = 0
4          for k = 1 to NbCols[A]
5              C[i,j] = C[i,j] + A[i,k] × B[k,j]
```

- Tamanho (digamos n): ordem das matrizes A, B, C.
  Obs. número de elementos m das matrizes é tal que $m = n^2$.
- Operação básica (laço mais aninhado): 1 adição + 1 multiplicação.

$$M(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n = \sum_{i=1}^{n} n^2 = n^3.$$

PPgSC

Um exemplo não tão simples

Exemplo

Tamanho da representação binária de um inteiro

```
BINARY(n)
1  count = 1
2  while n > 1
3        count = count + 1
4        n = ⌊n/2⌋
5  return count
```

Aplicação da estratégia

- A entrada é um inteiro n. O tamanho da entrada é o próprio n.
- A operação executada mais vezes é a comparação $n > 1$. É igual ao número de vezes que o laço é executado mais um.
- n apenas recebe alguns valores da faixa formada pelos seus valores inicial e final.
- O valor de n é dividido a cada iteração.
- O número de vezes qua operação básica é executada é $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.
- Utilizaremos uma relação de recorrência para mostrar isto.

PPgSC

Variação de amostra

Exercício (Cálculo de variação de amostra)

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x_1 \cdots x_n) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \text{ onde } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2/n}{n-1}.\end{aligned}$$

Encontre e compare a quantidade de cada tipo de operação para calcular a variação de amostra com cada uma das fórmulas.

Análise de algoritmo 1

Exercício

MYSTERY-1(n)

```
1  s = 0
2  for i = 1 to n
3        s = s + i × i
4  return s
```

1. *O que este algoritmo calcula?*
2. *Qual a sua operação básica? Quantas vezes é executada?*
3. *Qual a classe de complexidade do algoritmo?*
4. *Existe um algoritmo mais eficiente? Se existir, qual a classe de complexidade dele? Senão, porque?*

PPgSC

Análise de algoritmo 2

Exercício

MYSTERY-2(A)

```
1  m1 = A[1], m2 = A[1]
2  for i = 2 to length[A]
3        if A[i] < m1 then m1 = A[i]
4        if A[i] > m2 then m2 = A[i]
5  return m2 − m1
```

1. *O que este algoritmo calcula?*
2. *Qual a sua operação básica? Quantas vezes é executada?*
3. *Qual a classe de complexidade do algoritmo?*
4. *Existe um algoritmo mais eficiente? Se existir, qual a classe de complexidade dele? Senão, porque?*

PPgSC

Análise de algoritmo 3

Exercício

MYSTERY-3(A)

```
1  for i = 1 to NbLines[A] − 1
2        for j = i + 1 to NbLines[A]
3              if A[i, j] ≠ A[j, i] then return FALSE
4  return TRUE
```

1. *O que este algoritmo calcula?*
2. *Qual a sua operação básica? Quantas vezes é executada?*
3. *Qual a classe de complexidade do algoritmo?*
4. *Existe um algoritmo mais eficiente? Se existir, qual a classe de complexidade dele? Senão, porque?*

PPgSC