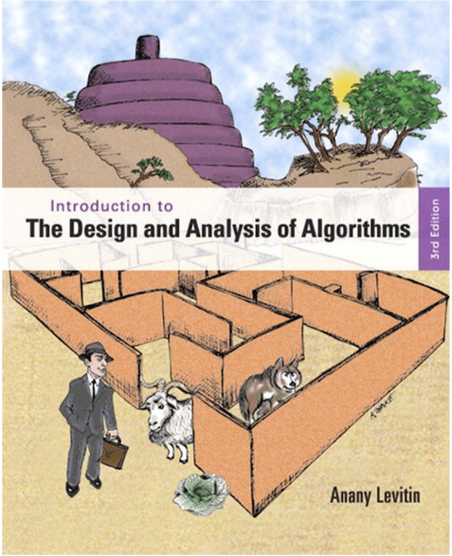
Aula 04: Análise de algoritmos — notações asintóticas e classes de complexidade

David Déharbe
Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemática Aplicada

Bibliografia usada



(seção 2.2)

Estrutura da apresentação

1. arcabouço teórico;
2. melhor caso, pior caso, caso médio;
3. notações asintóticas; O, Ω, Θ;
4. análise de algoritmos não recursivos;
5. análise de algoritmos recursivos.

Plano da aula

Introdução informal

Notação O

Notação Ω

Notação Θ

Outras notações

Propriedades das notações asintóticas

Usando limites para comparar crescimentos asintóticos

PPgSC

Introdução

Notações

Para um determinado algoritmo, $t(n)$ denota o tempo de execução (geralmente o contador de operações básicas $C(n)$).

$g(n)$ denota uma função, que é comparada com $t(n)$.

O objeto da comparação é o crescimento asintótico das funções.

Introdução

Notações

Para um determinado algoritmo, $t(n)$ denota o tempo de execução (geralmente o contador de operações básicas $C(n)$).
$g(n)$ denota uma função, que é comparada com $t(n)$.
O objeto da comparação é o crescimento asintótico das funções.

- $O(g(n))$ é o conjunto das funções com um crescimento asintótico menor ou igual ao de $g(n)$.
  $n \in O(n^2), \quad 100n + 5 \in O(n^2), \quad \frac{1}{2}n(n-1) \in O(n^2).$
  $n^3 \notin O(n^2), \quad 0,000001n^3 \notin O(n^2), \quad n^4 + n + 1 \notin O(n^2).$

Notações

Para um determinado algoritmo, $t(n)$ denota o tempo de execução (geralmente o contador de operações básicas $C(n)$).
$g(n)$ denota uma função, que é comparada com $t(n)$.
O objeto da comparação é o crescimento asintótico das funções.

- $\Omega(g(n))$ é o conjunto das funções com um crescimento asintótico maior ou igual ao de $g(n)$.
  $n^3 \in \Omega(n^2), \quad \frac{1}{2}n(n-1) \in \Omega(n^2), \quad 100n + 5 \notin \Omega(n^2)$.

Notações

Para um determinado algoritmo, $t(n)$ denota o tempo de execução (geralmente o contador de operações básicas $C(n)$).
$g(n)$ denota uma função, que é comparada com $t(n)$.
O objeto da comparação é o crescimento asintótico das funções.

- $\Theta(g(n))$ é o conjunto das funções com um crescimento asintótico igual a (um múltiplo positivo constante) de $g(n)$:
  $\Theta(n) = O(n) \cap \Omega(n)$.
  $an^2 + bn + c \in \Theta(n^2)$ se $a > 0$, $\quad n^2 + \log n \in \Theta(n^2)$.

PPgSC

Exercício

1. Entre O, Ω e Θ, qual a notação mais apropriada para discutir a complexidade:
   - no pior caso;
   - no melhor caso;
   - em média?
2. Aplique as definições informais para determinar se as seguintes asserções são verdadeiras ou falsas:
   - $n(n+1)/2 \in O(n^3)$;
   - $n(n+1)/2 \in O(n^2)$;
   - $n(n+1)/2 \in \Theta(n^3)$;
   - $n(n+1)/2 \in \Omega(n)$.

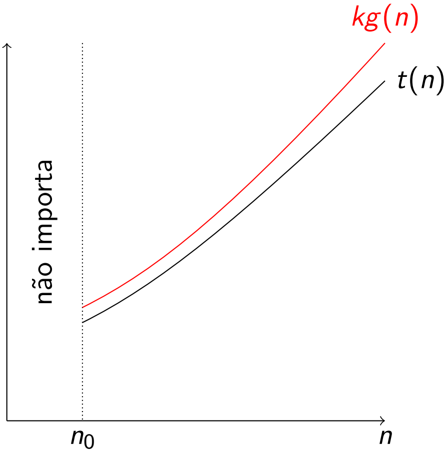
Notação O

Definição

Uma função $t(n)$ é classificada como $O(g(n))$, e escreve-se $t(n) \in O(g(n))$ se $t(n)$ tem como limite superior um múltiplo constante de $g(n)$, ou seja

$$\exists n_0, k \cdot \forall n \cdot n \geq n_0 \Rightarrow t(n) \leq k \times g(n).$$

Ilustração: $t(n) \in O(g(n))$



$$t(n) \in O(g(n)) \equiv \exists n_0, k \cdot \forall n \cdot n \geq n_0 \Rightarrow t(n) \leq k \times g(n).$$

Exemplo

Definição

$t(n) \in O(g(n))$ sse $\exists n_0, k \cdot \forall n \cdot n \geq n_0 \Rightarrow t(n) \leq k \times g(n)$.

Exemplo

Mostrar que $100n + 5 \in O(n^2)$.

Demonstração.

- Se $n \geq 5$, então $100n + 5 \leq 100n + n = 101n$.
- Se $n \geq 1$, então $101n \leq 101n^2$.
- Temos $\forall n \cdot n \geq 5 \Rightarrow \underbrace{100n + 5}_{t(n)} \leq \underbrace{101n^2}_{g(n)}$.

Ou seja, podemos usar os valores 101 e 5 como valores de k e n_0 da definição. $\square$

Exemplo

Definição

$t(n) \in O(g(n))$ sse $\exists n_0, k \cdot \forall n \cdot n \geq n_0 \Rightarrow t(n) \leq k \times g(n)$.

Exemplo

Mostrar que $100n + 5 \in O(n^2)$.

Demonstração.

- Se $n \geq 1$, então $100n + 5 \leq 100n + 5n = 105n$.
- Se $n \geq 1$, então $105n \leq 105n^2$.
- Temos $\forall n \cdot n \geq 1 \Rightarrow \underbrace{100n + 5}_{t(n)} \leq \underbrace{105n^2}_{g(n)}$.

Ou seja, podemos usar os valores 105 e 1 como valores de k e n_0 da definição. □

PPgSC

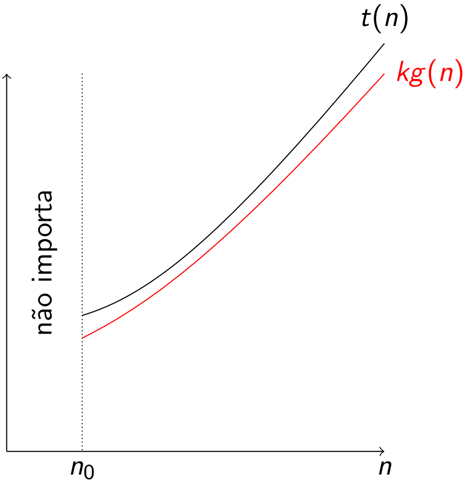
Notação Ω

Definição

Uma função $t(n)$ é classificada como $\Omega(g(n))$, e escreve-se $t(n) \in \Omega(g(n))$ se $t(n)$ tem como limite inferior um múltiplo constante de $g(n)$, ou seja

$$\exists n_0, k \cdot \forall n \cdot n \geq n_0 \Rightarrow t(n) \geq k \times g(n).$$

Ilustração: $t(n) \in \Omega(g(n))$



$$\exists n_0, k \cdot \forall n \cdot n \geq n_0 \Rightarrow t(n) \geq k \times g(n).$$

Exemplo

Definição

$t(n) \in \Omega(g(n))$ sse $\exists n_0, k \cdot \forall n \cdot n \geq n_0 \Rightarrow t(n) \geq k \times g(n)$.

Exemplo

Mostrar que $0,00001 n^3 \in \Omega(n^2)$.

Demonstração.

Neste caso, basta selecionar $n_0 = 0$ e $k = 0,00001$. $\square$

Notação Θ

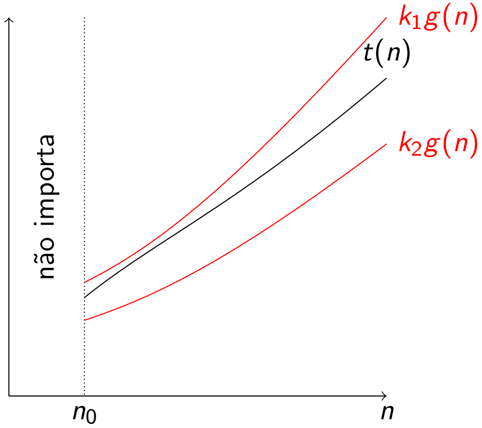
Definição

Uma função $t(n)$ é classificada como $\Theta(g(n))$, e escreve-se $t(n) \in \Theta(g(n))$ se $t(n)$ tem como limites inferior e superior dois múltiplos constantes de $g(n)$, ou seja

$$\exists n_0, k_1, k_2 \cdot \forall n \cdot n \geq n_0 \Rightarrow k_2 \times g(n) \leq t(n) \leq k_1 \times g(n).$$

PPgSC

Ilustração: $t(n) \in \Theta(g(n))$



$$t(n) \in \Theta(g(n))$$
$$\equiv \quad \exists n_0, k_1, k_2 \cdot \forall n \cdot n \geq n_0 \Rightarrow k_2 \times g(n) \leq t(n) \leq k_1 \times g(n).$$

Exemplo

Definição

$t(n) \in \Theta(g(n))$ sse
$\exists n_0, k_1, k_2 \cdot \forall n \cdot n \geq n_0 \Rightarrow k_2 \times g(n) \leq t(n) \leq k_1 g(n)$.

Exemplo

Mostrar que $\frac{1}{2}n(n-1) \in \Theta(n^2)$.

Demonstração.

- $\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$;
- se $n \geq 0$, então $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}n^2$
- se $n \geq 2$, então $\frac{1}{2}n \geq 1$ e $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \geq \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \times \frac{1}{2}n = \frac{1}{4}n^2$.

Neste caso, basta selecionar $n_0 = 2$, $k_2 = \frac{1}{4}$ e $k_1 = \frac{1}{2}$. $\square$

PPgSC

Outras notações

- $t(n) \in o(g(n))$ ("*little oh*") se
  - $t(n) \in O(g(n))$ e
  - $t(n) \notin \Theta(g(n))$.

  $t(n)$ tem crescimento asintótico estritamente menor que $g(n)$.

Outras notações

- $t(n) \in \omega(g(n))$ ("*little omega*") se
  - $t(n) \in O(g(n))$ e
  - $t(n) \notin \Theta(g(n))$.

  $t(n)$ tem crescimento asintótico estritamente maior que $g(n)$.

Outras notações

- $t(n) \sim g(n)$ quando $t(n)$ e $g(n)$ tem o mesmo crescimento asintótico.

Propriedades

Teorema (Soma de limites asintóticos superiores)

Se $t_1(n) \in O(g_1(n))$ *e* $t_2(n) \in O(g_2(n))$, *então* $t_1(n) + t_2(n) \in O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$.
(Esta asserção vale também substituindo O *por* Ω *e* Θ*.)*

Demonstração.

- se $t_1(n) \in O(g_1(n))$, então
  $\exists k_1, n_1 \cdot \forall n \cdot n \geq n_1 \Rightarrow t_1(n) \leq k_1 \times g_1(n)$;
- se $t_2(n) \in O(g_2(n))$, então
  $\exists k_2, n_2 \cdot \forall n \cdot n \geq n_2 \Rightarrow t_2(n) \leq k_2 \times g_2(n)$;
- seja $k_3 = 2\max\{k_1, k_2\}$ e $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$.
- $\forall n \cdot n \geq n_3 \Rightarrow t_1(n) + t_2(n) \leq k_3 \times \max\{g_1(n), g_2(n)\}$.

Aplicação

- Considere um algoritmo composto por duas partes executadas sequencialmente, de complexidade $O(g_1(n))$ e $O(g_2(n))$ respectivamente;
- a complexidade do algoritmo é $O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$;
- a complexidade do algoritmo é determinada pela parte com maior complexidade
- a parte com menor complexidade não precisa ser levada em conta.

Exemplo

Exemplo

Um algoritmo para testar se um arranjo possui elementos repetidos é composto por dois sub-algoritmos:

1. ordenação dos elementos, digamos em $O(n^2)$;
2. inspeção de cada elemento e seu sucessor, para determinar se são iguais, em $O(n)$.

A complexidade do algoritmo principal é $O(\max\{n^2, n\}) = O(n^2)$.

Exemplo

Exemplo

Um algoritmo para testar se um arranjo possui elementos repetidos é composto por dois sub-algoritmos:

1. ordenação dos elementos, digamos em $O(n^2)$;
2. inspeção de cada elemento e seu sucessor, para determinar se são iguais, em $O(n)$.

A complexidade do algoritmo principal é $O(\max\{n^2, n\}) = O(n^2)$.

Exercício

Qual a complexidade do algoritmo principal se a primeira fase tem complexidade $O(n \log n)$?

Usando limites na comparação de crescimentos asintóticos

- As definições de O, Θ e Ω são usadas para provar propriedades gerais.
- São raramente usadas para comparar as funções caracterizando a complexidade de algoritmos.
- Um método mais conveniente é usar a noção de limite ao infinito, e aplicá-la à razão entre essas funções:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t(n)}{g(n)}$$

PPgSC

Comparações possíveis

Os resultados possíveis são:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)} = 0$ quando $t(n)$ cresce asintóticamente menos que $g(n)$;
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)} = c$, onde $c > 0$, quando $t(n)$ e $g(n)$ cresce asintóticamente da mesma forma;
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)} = \infty$ quando $t(n)$ cresce asintóticamente mais que $g(n)$.

Comparações possíveis

Os resultados possíveis são:

1. $\lim_{n \to \infty} \frac{t(n)}{g(n)} = 0$ quando $t(n)$ cresce asintóticamente menos que $g(n)$;
   $t(n) \in o(g(n))$, $t(n) \in O(g(n))$
2. $\lim_{n \to \infty} \frac{t(n)}{g(n)} = c$, onde $c > 0$, quando $t(n)$ e $g(n)$ cresce asintóticamente da mesma forma;
3. $\lim_{n \to \infty} \frac{t(n)}{g(n)} = \infty$ quando $t(n)$ cresce asintóticamente mais que $g(n)$.

PPgSC

Comparações possíveis

Os resultados possíveis são:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)} = 0$ quando $t(n)$ cresce asintóticamente menos que $g(n)$;
   $t(n) \in o(g(n))$, $t(n) \in O(g(n))$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)} = c$, onde $c > 0$, quando $t(n)$ e $g(n)$ cresce asintóticamente da mesma forma;
   $t(n) \in O(g(n)), t(n) \in \Theta(g(n)), t(n) \in \Omega(g(n))$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)} = \infty$ quando $t(n)$ cresce asintóticamente mais que $g(n)$.

Comparações possíveis

Os resultados possíveis são:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)} = 0$ quando $t(n)$ cresce asintóticamente menos que $g(n)$;
   $t(n) \in o(g(n))$, $t(n) \in O(g(n))$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)} = c$, onde $c > 0$, quando $t(n)$ e $g(n)$ cresce asintóticamente da mesma forma;
   $t(n) \in O(g(n)), t(n) \in \Theta(g(n)), t(n) \in \Omega(g(n))$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)} = \infty$ quando $t(n)$ cresce asintóticamente mais que $g(n)$.
   $t(n) \in \omega(g(n)), t \in \Omega(g(n))$

Exemplo 1

Exercício

Compare o crescimento asintótico de $\frac{1}{2}n(n-1)$ *e* n^2.

Exemplo 1

Exercício

Compare o crescimento asintótico de $\frac{1}{2}n(n-1)$ *e* n^2.

Resolução

Aplicando a abordagem da razão dos limites, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n^2} &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

O resultado é uma constante positiva: apenas um fator constante distingue o crescimento de $\frac{1}{2}n(n+1)$ *e* n^2. *Logo* $\frac{1}{2}n(n+1) \in \Theta(n^2)$.

PPgSC

Existem muitas técnicas de cálculo para avaliar limites que podem então ser aplicadas.

Teorema (Regra de L'Hôpital — caso particular)

Seja $t(n)$ e $g(n)$ duas funções positivas, crescentes, com limites definidos no infinito, e deriváveis. Se $\lim_{n\to\infty} t(n) = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$, então:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{t'(n)}{g'(n)}$$

Ao invés de estudar o limite da razão de duas funções, pode-se estudar o limite da razão das derivadas destas funções.

Exemplo 2

Exercício

Compare o crescimento asintótico de $\log_2 n$ *e* $\sqrt{n}$.

Exemplo 2

Exercício

Compare o crescimento asintótico de $\log_2 n$ *e* $\sqrt{n}$*.*

Resolução

As funções $\log_2 n$ *e* $\sqrt{n}$ *são deriváveis e são tais que* $\lim_{n\to\infty} \log_2 n = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$. *Podemos aplicar a abordagem da razão dos limites e a Regra de L'Hôpital:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\log_2 n)'}{\sqrt{n}'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \ln 2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} \\ &= \frac{2}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.\end{aligned}$$

$\log_2 n$ *cresce asintoticamente menos que* $\sqrt{n}$*.*

PPgSC

Exemplo 2

Exercício

Compare o crescimento asintótico de $\log_2 n$ *e* $\sqrt{n}$*.*

Resolução

As funções $\log_2 n$ *e* $\sqrt{n}$ *são deriváveis e são tais que* $\lim_{n\to\infty} \log_2 n = \infty$ *e* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$*. Podemos aplicar a abordagem da razão dos limites e a Regra de L'Hôpital:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\log_2 n)'}{\sqrt{n}'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \ln 2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} \\
&= \frac{2}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.
\end{aligned}$$

$\log_2 n$ *cresce asintoticamente menos que* $\sqrt{n}$*.*

Pode se dizer que $\log_2 n \in o(\sqrt{n})$.

PPgSC

Exemplo 3

Exercício

Compare o crescimento asintótico de $n!$ e 2^n.

Use o resultado seguinte (fórmula de Stirling): $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exemplo 3

Exercício

Compare o crescimento asintótico de $n!$ e 2^n.

Use o resultado seguinte (fórmula de Stirling): $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{2e}\right)^n = \infty$$

$n!$ cresce mais rapidamente que 2^n: $n! \in \Omega(2^n)$, e $n! \in \omega(2^n)$.

Exercício

Para cada uma das funções seguintes, indique a classe $\Theta(g(n))$ da função, expressando $g(n)$ da forma mais simples possível.

1. $(n^2 + 1)^{10}$
2. $\sqrt{10n^2 + 7n + 3}$
3. $2n \lg(n + 2)^2 + (n + 2)^2 \lg \frac{n}{2}$
4. $2^{n+1} + 3^{n-1}$
5. $\lfloor \log_2 n \rfloor$

Prove suas asserções.

Exercício

Para cada uma das funções seguintes, indique a classe $\Theta(g(n))$ da função, expressando $g(n)$ da forma mais simples possível.

1. $(n^2 + 1)^{10}$
2. $\sqrt{10n^2 + 7n + 3}$
3. $2n \lg(n + 2)^2 + (n + 2)^2 \lg \frac{n}{2}$
4. $2^{n+1} + 3^{n-1}$
5. $\lfloor \log_2 n \rfloor$

Prove suas asserções.

Exercício

Liste as funções seguintes por ordem crescente de crescimento asintótico:

$(n-2)!$ $\quad 5\lg(n+100)^{10}$ $\quad 2^{2n}$ $\quad 0,001n^4+3n^3+1$ $\quad \ln^2 n$ $\quad \sqrt{n_3}$ $\quad n^3$