Aula 02: Análise de algoritmos — introdução

David Déharbe
Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Informática e Matemática Aplicada

Plano da aula

Introdução

Considerações iniciais

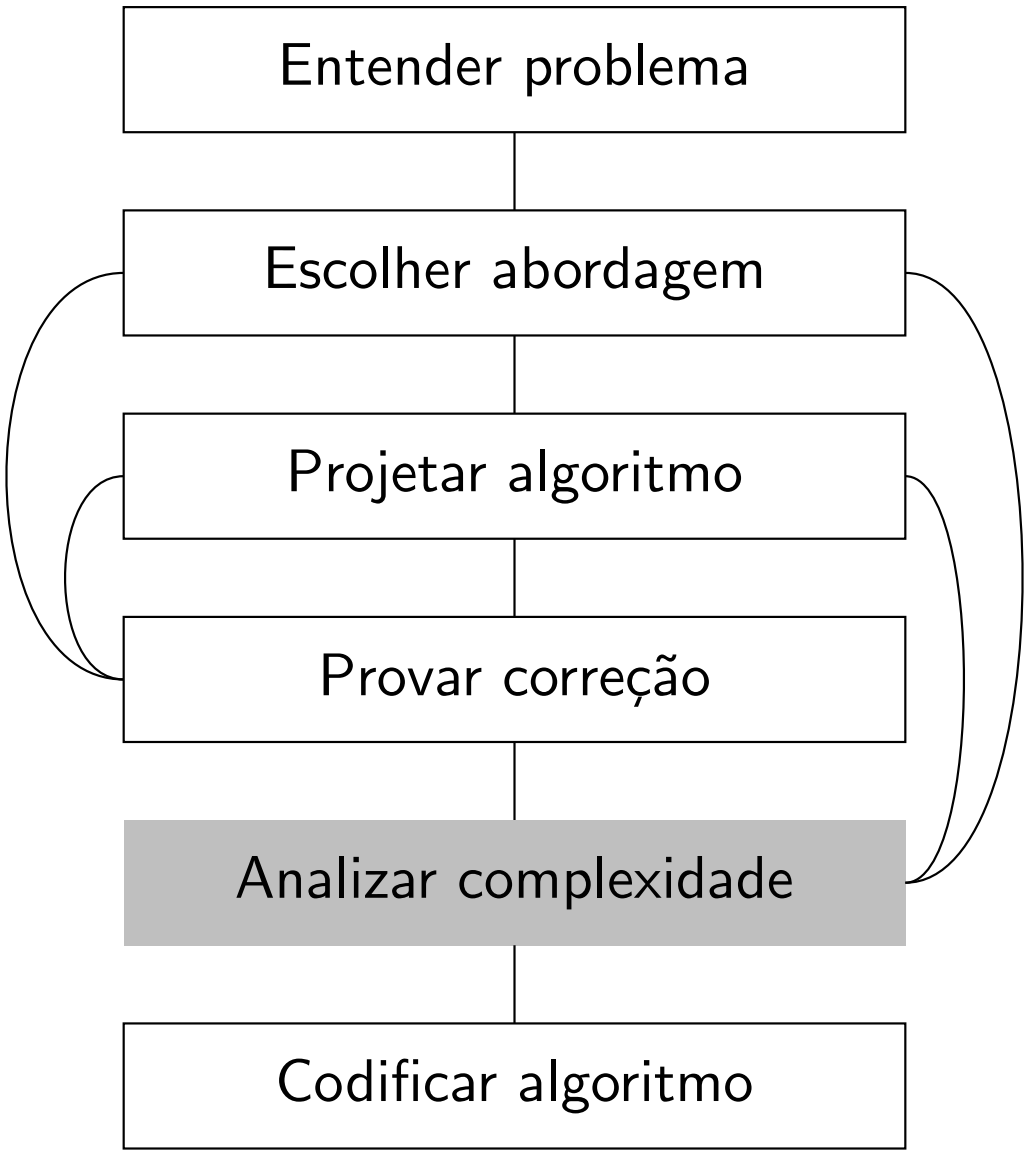
Medição do tamanho da entrada

Medição do tempo de execução

Ordens de crescimento

Notação Θ

Contexto



PPgSC

Análise de algoritmos

analysis
detailed examination of the elements or structure of something, typically as a basis for discussion or interpretation: statistical analysis — an analysis of popular culture.
— Dictionary Apple 2.2.3

Análise de algoritmos

analysis
detailed examination of the elements or structure of something, typically as a basis for discussion or interpretation: statistical analysis — an analysis of popular culture.
— *Dictionary Apple 2.2.3*

- correção
- simplicidade
- generalidade
- recursos necessários para ser aplicado
  - tempo de processador
  - quantidade de memória

PPgSC

Análise de algoritmos

analysis
detailed examination of the elements or structure of something, typically as a basis for discussion or interpretation: statistical analysis — an analysis of popular culture.
— *Dictionary Apple 2.2.3*

- correção
- simplicidade
- generalidade
- recursos necessários para ser aplicado ←
  - tempo de processador
  - quantidade de memória

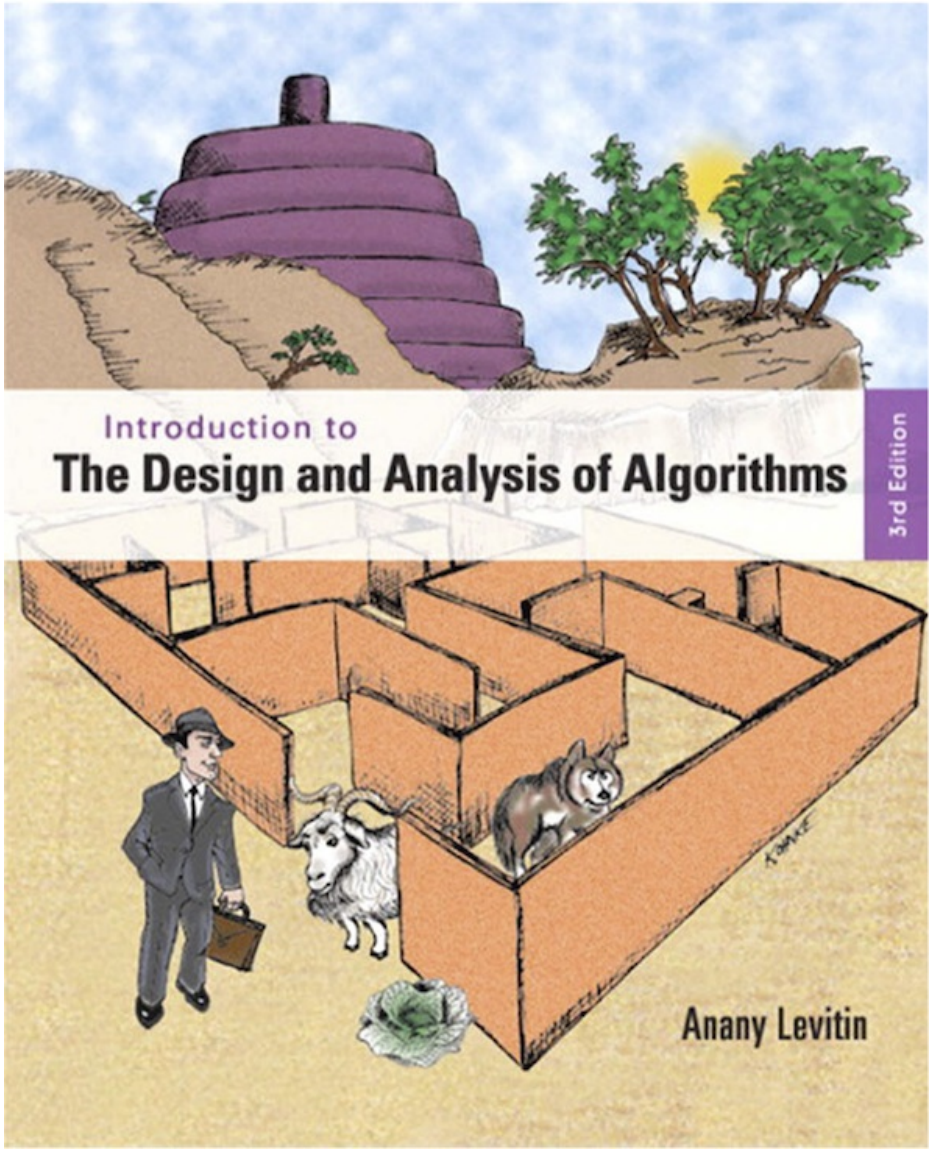
PPgSC

Estrutura da apresentação

1. arcabouço de análise, noção de crescimento asintótico;
2. notações asintóticas; O, Ω, Θ;
3. análise de algoritmos não recursivos;
4. análise de algoritmos recursivos.

PPgSC

Bibliografia usada



Terminologia

- eficácia temporal, complexidade temporal:
  - quão rápido o algoritmo se executa?
  - quantos ciclos de processadores são necessários para executar o algoritmo?
- eficácia espacial, complexidade espacial:
  - quanta memória o algoritmo requer para armazenar os dados que manipula?
  - quantas unidades de memória precisam ser alocadas?

PPgSC

Motivação

- recursos computacionais escassos;
- computação móvel, computação ubíqua: computação = energia;
- geralmente a velocidade é um recurso mais crítico;
- tempo de execução tem sido o aspecto onde ganhos são maiores

PPgSC

Motivação

- recursos computacionais escassos;
- computação móvel, computação ubíqua: computação = energia;
- geralmente a velocidade é um recurso mais crítico;
- tempo de execução tem sido o aspecto onde ganhos são maiores

Foco na complexidade temporal

PPgSC

Parâmetro da complexidade

Observação

Para quase todos os algoritmos, quanto maior for o tamanho da entrada, maior é o número de computações necessárias.

É natural querer definir a complexidade de um algoritmo em função do tamanho da entrada.

PPgSC

Exemplos

- processamento de uma lista: o número de elementos na lista;
- processamento de uma matriz: o número de linhas e colunas da matriz;
- processamento em grafo: número de vértices, número de arestas;
- processamento de números: número de bits usados para representar os números ($\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$).
- verificar se uma fórmula de lógica Booleana é válida: número de variáveis proposicionais.

PPgSC

Exercícios

1. calcular a soma de n números;
2. calcular $n!$;
3. encontar o maior elemento em uma lista de n elementos;
4. algoritmo para multiplicar dois inteiros decimais de n dígitos cada;
5. crivo de Eratóstenes;
6. algoritmo de Euclides.

PPgSC

Unidade de medição do tempo de execução de um algoritmo

Abordagem ingénua

- implementar o algoritmo na sua linguagem de programação favorita;
- medir o tempo de execução da implementação para diferentes entradas é ingénua

Problemas:

- características do hardware tem influência;
- compilador tem influência;
- dificuldade de medição precisa.

Não é satisfatório

Unidade de medição do tempo de execução de um algoritmo

Precisamos de uma abordagem que não dependa de fator externos ao algoritmo.

- contar quantas vezes cada comando do algoritmo é executado.

Exemplo (Cormen et al.)

Exemplo

INSERTION-SORT(A)

1 **for** $j = 2$ **to** $length[A]$ // $c_1 \cdot n$
2 $key = A[j]$ // $c_2 \cdot (n-1)$
3 $i = j - 1$ // $c_3 \cdot (n-1)$
4 **while** $i > 0 \wedge A[i] > key$ // $c_4 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j$
5 $A[i+1] = A[i]$ // $c_5 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
6 $i = i - 1$ // $c_6 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
7 $A[i+1] = key$ // $c_7 \cdot (n-1)$

- c_i: custo de executar cada linha
- t_j: número de vezes que o teste é efetuado para o elemento $A[j]$.
- custo total: $c_1.n + c_2.(n-1) + c_3.(n-1) + c_4.\sum_{j=2}^{n} t_j + c_5.\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_6.\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_7.(n-1)$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c_1.n + c_2.(n-1) + c_3.(n-1) + c_4.\sum_{j=2}^{n} t_j + \\
&\quad c_5.\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_6.\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_7.(n-1) \\
&= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\
&\quad + c_4.\sum_{j=2}^{n} t_j + (c_5 + c_6).\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)
\end{aligned}
$$

Observamos que a complexidade do algoritmo depende de n, dos t_i e dos c_i.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c_1.n + c_2.(n-1) + c_3.(n-1) + c_4.\sum_{j=2}^{n} t_j + \\
&\quad c_5.\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_6.\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_7.(n-1) \\
&= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\
&\quad + c_4.\sum_{j=2}^{n} t_j + (c_5 + c_6).\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)
\end{aligned}
$$

Observamos que a complexidade do algoritmo depende de n, dos t_i e dos c_i.

Exercício

Os c_i dependem da plataforma de execução, não de A.

1. Qual o menor valor possível para os t_i? Corresponde a qual situação?
2. Qual o maior valor possível para os t_i? Corresponde a qual situação?
3. Qual a complexidade do algoritmo nestas duas situações?

Exemplo: melhor caso

INSERTION-SORT(A)

1 **for** $j = 2$ **to** $length[A]$ // $c_1 \cdot n$
2 $\quad key = A[j]$ // $c_2 \cdot (n-1)$
3 $\quad i = j - 1$ // $c_3 \cdot (n-1)$
4 $\quad$ **while** $i > 0 \wedge A[i] > key$ // $c_4 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j$
5 $\quad\quad A[i+1] = A[i]$ // $c_5 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
6 $\quad\quad i = i - 1$ // $c_6 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
7 $\quad A[i+1] = key$ // $c_7 \cdot (n-1)$

- O teste do laço é avaliado uma vez apenas.
- $t_j = 1$ para $j = 2, \cdots n$

Exemplo: melhor caso

$\sum_{j=2}^{n} 1 = n - 1$ e $\sum_{j=2}^{n} 1 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\ &\quad + c_4 . \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_5 + c_6). \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) \end{aligned}$$

Exemplo: melhor caso

$\sum_{j=2}^{n} 1 = n - 1$ e $\sum_{j=2}^{n} 1 - 1 = 0$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\
&\quad + c_4 . \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_5 + c_6). \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) \\
&= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\
&\quad + c_4.(n - 1)
\end{aligned}
$$

PPgSC

Exemplo: melhor caso

$\sum_{j=2}^{n} 1 = n - 1$ e $\sum_{j=2}^{n} 1 - 1 = 0$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\
&\quad + c_4 . \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_5 + c_6). \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) \\
&= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\
&\quad + c_4 .(n - 1)
\end{aligned}
$$

$$
T(n) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7)
$$

PPgSC

Exemplo: pior caso

INSERTION-SORT(A)

1 **for** $j = 2$ **to** $length[A]$ // $c_1 \cdot n$
2 $\quad key = A[j]$ // $c_2 \cdot (n-1)$
3 $\quad i = j - 1$ // $c_3 \cdot (n-1)$
4 $\quad$ **while** $i > 0 \wedge A[i] > key$ // $c_4 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j$
5 $\quad\quad A[i+1] = A[i]$ // $c_5 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
6 $\quad\quad i = i - 1$ // $c_6 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
7 $\quad A[i+1] = key$ // $c_7 \cdot (n-1)$

- O teste do laço é avaliado j vezes.
- $t_j = j$ para $j = 2, \cdots n$

Exemplo: pior caso

$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$. e $\sum_{j=2}^{n}(j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\begin{aligned} T(n) &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\ &\quad + c_4 . \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_5 + c_6). \sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) \end{aligned}$$

Exemplo: pior caso

$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$. e $\sum_{j=2}^{n}(j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\begin{aligned} T(n) &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\ &\quad + c_4 . \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_5 + c_6). \sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\ &\quad c_4.(\frac{n(n+1)}{2} - 1) + (c_5 + c_6).\frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Exemplo: pior caso

$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$. e $\sum_{j=2}^{n}(j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$\begin{aligned} T(n) &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\ &\quad + c_4.\sum_{j=2}^{n} t_j + (c_5 + c_6).\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_7).n - (c_2 + c_3 + c_7) \\ &\quad c_4.(\frac{n(n+1)}{2} - 1) + (c_5 + c_6).\frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{c_4+c_5+c_6}{2}.n^2 + \\ &\quad (c_1 + c_2 + c_3 + \frac{c_4}{2} - \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} + c_7).n \\ &\quad -(c_2 + c_3 + c_4 + \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + c_7) \end{aligned}$$

PPgSC

O conceito de operação básica

- Esta forma de análise é demasiadamente detalhista;
- Estes detalhes são inúteis, pois os c_i são fatores externos ao algoritmo.
- Ao invés disto, deve-se identificar a operação predominante na execução do algoritmo: a *operação básica*.
- A operação básica é aquela operação mais executada pelo algoritmo.
- Basta contar quantas vezes o algoritmo executa a operação básica.

Ponto chave

O arcabouço clássico de análise de complexidade de algoritmos é contar quantas vezes a operação básica é executada, em função do tamanho da entrada n.

Identificação da operação básica

Dica

Em algoritmos iterativos, é a operação que fica no laço mais aninhado.

Identificação da operação básica

Dica

Em algoritmos iterativos, é a operação que fica no laço mais aninhado.

INSERTION-SORT(A)

1 **for** $j = 2$ **to** $length[A]$ // $c_1 \cdot n$
2 $key = A[j]$ // $c_2 \cdot (n-1)$
3 $i = j - 1$ // $c_3 \cdot (n-1)$
4 **while** $i > 0 \wedge A[i] > key$ // $c_4 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j$
5 $A[i+1] = A[i]$ // $c_5 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
6 $i = i - 1$ // $c_6 \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
7 $A[i+1] = key$ // $c_7 \cdot (n-1)$

Em outras palavras: quantas comparações são necessárias para ordenar n elementos com o algoritmo de ordenação por inserção?

Exercício

Qual a operação básica do algoritmo de busca linear?

LINEAR-SEARCH(A, v)

```
1  j = 1
2  while A[j] ≠ v and j ≤ length(A)
3        j = j + 1
4  if j ≤ length(A)
5        return j
6  else return NIL
```

Exercício

1. Considere o algoritmo de soma de duas matrizes $N \times M$.
   Qual a operação básica? Quantas vezes é executada?
2. Considere o algoritmo de multiplicação de uma matriz $N \times M$ por uma matriz $M \times P$.
   Qual a operação básica? Quantas vezes é executada?

Considerações

- Considere um algoritmo qualquer.
- Seja c o custo da execução da operação básica.
- Seja $C(n)$ o número de vezes que esta operação é executada pelo algoritmo.
- O tempo de execução do algoritmo $T(n)$, para uma entrada de tamanho n é tal que $T(n) \approx c \times C(n)$.
- Atenção $T(n)$ é *aproximado*:
  - c é aproximado,
  - as operações não básicas não são contabilizadas.
  - é uma estimativa razoável menos no caso de n ser muito pequeno ou muito grande.

PPgSC

Perguntas

$$T(n) \approx c \times C(n).$$

- Quantas vezes mais rápido será executado o algoritmo em um computador 10 vezes mais rápido?
- Assumindo $C(n) = \frac{1}{2}.n.(n-1)$: quantas vezes mais tempo levará a execução do algoritmo se multiplicarmos o tamanho da entrada por dois?

PPgSC

Perguntas

$$T(n) \approx c \times C(n).$$

- Quantas vezes mais rápido será executado o algoritmo em um computador 10 vezes mais rápido?
  10
- Assumindo $C(n) = \frac{1}{2}.n.(n-1)$: quantas vezes mais tempo levará a execução do algoritmo se multiplicarmos o tamanho da entrada por dois?

Perguntas

$$T(n) \approx c \times C(n).$$

- Quantas vezes mais rápido será executado o algoritmo em um computador 10 vezes mais rápido?
  10
- Assumindo $C(n) = \frac{1}{2}.n.(n-1)$: quantas vezes mais tempo levará a execução do algoritmo se multiplicarmos o tamanho da entrada por dois?

$$\begin{aligned} T(2n)/T(n) &= \frac{c \times C(2n)}{c \times C(n)} = \frac{C(2n)}{C(n)} \\ &= \frac{2n.(2n-1)}{n.(n-1)} = \frac{4n^2 - 2n}{n^2 - n} \\ &\approx 4 \text{ se } n \text{ for grande} \end{aligned}$$

PPgSC

Observações

Para responder a pergunta:

- Assumindo $C(n) = \frac{1}{2}.n.(n-1)$: quantas vezes mais tempo levará a execução do algoritmo se multiplicarmos o tamanho da entrada por dois?

PPgSC

Observações

Para responder a pergunta:

- Assumindo $C(n) = \frac{1}{2}.n.(n-1)$: quantas vezes mais tempo levará a execução do algoritmo se multiplicarmos o tamanho da entrada por dois?

Observe que:

1. Não precisamos saber o valor de c para responder: ele foi simplificado.
2. O fator multiplicativo $\frac{1}{2}$ também foi simplificado.
3. Em $C(n)$ apenas o monômio de maior coeficiente foi determinante para calcular o resultado (assumindo n é grande o suficiente).

Ponto chave

A análise de algoritmos desconsidera os fatores multiplicativos, e concentra-se no *crescimento asintótico* considerando entradas de grande tamanho.

Crescimento asintótico

- O custo do algoritmo para entradas pequenas é geralmente irrelevante.
- A diferença entre algoritmos se faz com entradas de grande tamanho.
- Para entradas de grande tamanho, a crescimento asintótico do custo de computação é o aspecto mais importante.

PPgSC

Valores (aproximados) de funções significativas

n	$\log_2 n$	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
10	$3,3$	10	$3,3 \times 10^1$	10^2	10^3	10^3	$3,6 \times 10^6$
10^2	$6,6$	10^2	$6,6 \times 10^2$	10^4	10^6	$1,3 \times 10^{30}$	$9,3 \times 10^{157}$
10^3	10	10^3	$1,0 \times 10^4$	10^6	10^9		
10^4	13	10^4	$1,3 \times 10^5$	10^6	10^9		
10^5	17	10^5	$1,7 \times 10^6$	10^{10}	10^{15}		
10^6	20	10^6	$2,0 \times 10^7$	10^{12}	10^{18}		

PPgSC

Valores (aproximados) de funções significativas

n	$\log_2 n$	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
10	$3,3$	10	$3,3 \times 10^1$	10^2	10^3	10^3	$3,6 \times 10^6$
10^2	$6,6$	10^2	$6,6 \times 10^2$	10^4	10^6	$1,3 \times 10^{30}$	$9,3 \times 10^{157}$
10^3	10	10^3	$1,0 \times 10^4$	10^6	10^9		
10^4	13	10^4	$1,3 \times 10^5$	10^6	10^9		
10^5	17	10^5	$1,7 \times 10^6$	10^{10}	10^{15}		
10^6	20	10^6	$2,0 \times 10^7$	10^{12}	10^{18}		

A função logaritmo é a que cresce mais devagar.

- Algoritmos de complexidade logarítmica tem custo imperceptível.
- A base do logaritmo é irrelevante: $\log_a n = \log_b n \times \log_a b$. As funções só são diferentes por uma constante multiplicativa.

PPgSC

Valores (aproximados) de funções significativas

n	$\log_2 n$	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
10	$3,3$	10	$3,3 \times 10^1$	10^2	10^3	10^3	$3,6 \times 10^6$
10^2	$6,6$	10^2	$6,6 \times 10^2$	10^4	10^6	$1,3 \times 10^{30}$	$9,3 \times 10^{157}$
10^3	10	10^3	$1,0 \times 10^4$	10^6	10^9		
10^4	13	10^4	$1,3 \times 10^5$	10^6	10^9		
10^5	17	10^5	$1,7 \times 10^6$	10^{10}	10^{15}		
10^6	20	10^6	$2,0 \times 10^7$	10^{12}	10^{18}		

As funções 2^n e $n!$ tem crescimento muito rápido.

- Para qualquer entrada não pequena, o valor é astronômico;
- O tempo de execução para entradas grandes excede a idade estimada do universo ∞.
- Não são práticos para entradas que não sejam pequenas.

PPgSC

Exercício

Como reagem essas funções quando n é duplicado? quadruplicado?

- $\log_2 n$
- n
- $n \log_2 n$
- n^2
- n^3
- 2^n
- $n!$

Exercício

Para cada par de funções, indique se a primeira tem maior crescimento asintótico que a segunda, menor crescimento asintótico, ou se os crescimentos asintóticos são iguais:

- $n.(n+1)$ e $2000.n^2$;
- $\log_2 n$ e $\ln n$;
- 2^{n-1} e 2^n;
- $100.n^2$ e $0,01.n^3$;
- $\log_2^2 n$ e $\log_2 n^2$;
- $(n-1)!$ e $n!$.

Exemplo: crescimento asintótico

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \frac{c_4+c_5+c_6}{2}.n^2 + \\
&\quad (c_1 + c_2 + c_3 + \frac{c_4}{2} - \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} + c_7).n \\
&\quad -(c_2 + c_3 + c_4 + \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + c_7)
\end{aligned}
$$

$$
T(n) = a.n^2 + b.n + c
$$

onde a, b, c são constantes que dependem da plataforma de execução.
Quando n é grande, o fator predominante é $a.n^2$.
Diz se que

- $T(n) \in \Theta(n^2)$.
- O crescimento asintótico do tempo de execução é n^2.
- O algoritmo é *quadrático*.

Síntese

- tamanho da(s) entrada(s)
- operação básica
- crescimento asintótico
- funções tipicamente encontradas

logarítmica	$\log n$,
linear	n,
quase-linear	$n \log n$,
quadrática	n^2,
polinomial	n^k, onde $k > 1$
exponencial	k^n, onde $k > 1$
fatorial	$n!$

PPgSC